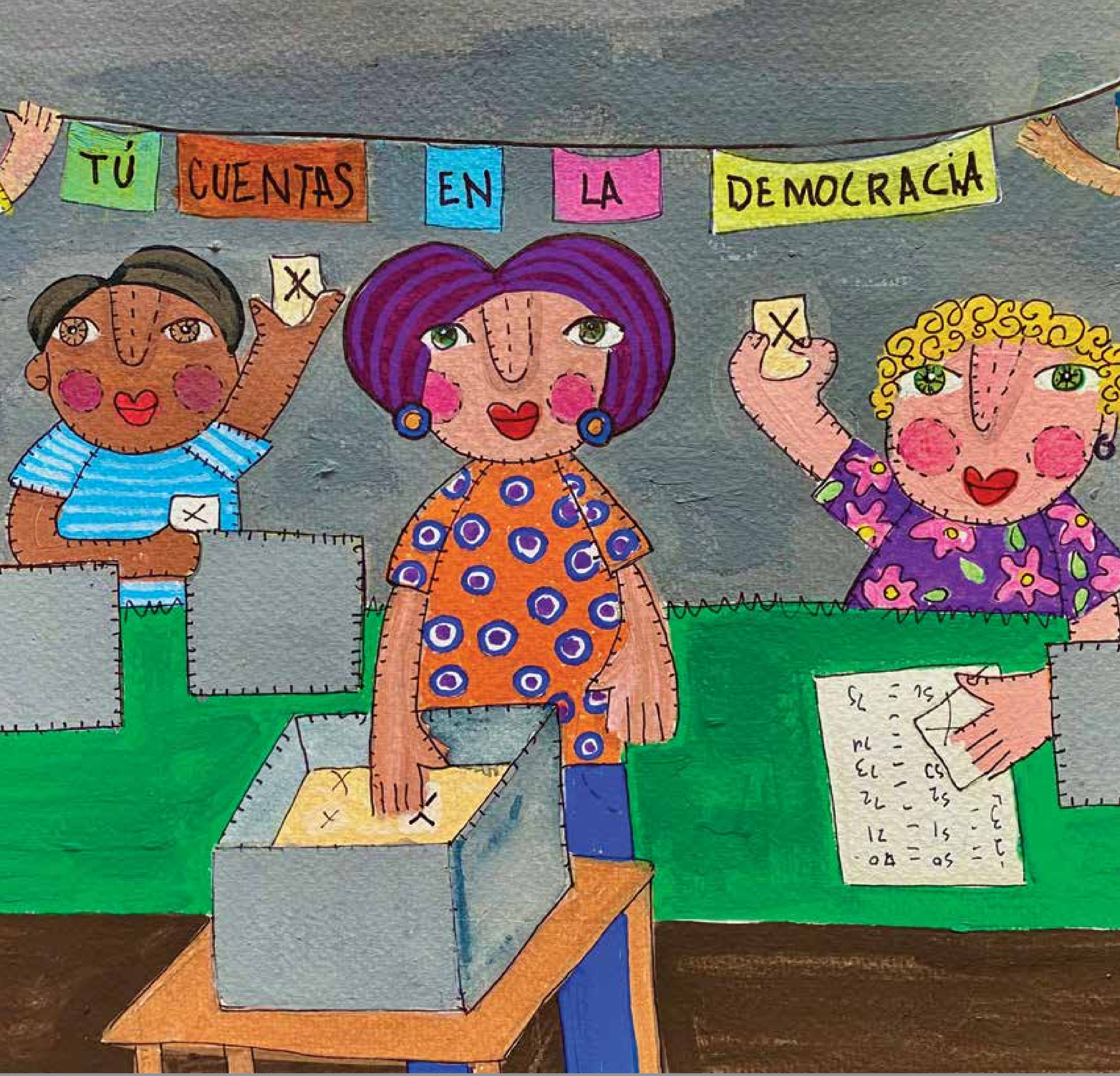


SECUNDARIA

5

Pensamiento matemático

Modelo de Educación para la Vida, AprendeINEA

Pensamiento matemático 5

Modelo de Educación para la Vida, AprendeINEA

SECUNDARIA

DIRECTORIO
Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Teresa Guadalupe Reyes Sahagún
Directora General del INEA

Cecilia Orozco López
Directora Académica

Créditos de la presente edición

Coordinación General
Teresa Guadalupe Reyes Sahagún

Coordinación Académica
Cecilia Orozco López

Coordinación de la obra
Greta Margarita Papadimetriou Cámara
Colectivo de Educación para la Paz, A.C.

Coordinación del Campo formativo Pensamiento matemático
Laura Valdivia Moreno

Autoría
Laura Valdivia Moreno
Vianney Rangel Reyes
Miguel Rodríguez Ruiz

Colaboración
Angélica Guadalupe Zamudio Camargo, René Luis Rubio Garibay, Guillermo González Zárate, Ricardo Díaz Estrada, Teresa Susana Uscanga Olea, José Félix Salazar Rodríguez, Ángel Misael Pelayo Gómez, Yesenia Villicaña Molina

Diseño
Diagramación e iconografía
Elizabeth Martínez Suástegui
Laura Valdivia Moreno

Portada
Raquel Rojas Nieto

Ilustraciones
Jorge Mendoza Campos
David Nieto Vital
Rosalinda Raya Lemus
Isabel Gómez Guízar
María Isabel Vega Pérez
Jesús Enrique Gil de María y Campos

Fotografía
Fernando Franco
Banco de imágenes de Shutterstock
Banco de imágenes de Adobe Stock

Revisión colegiada
María de Lourdes Aravedo Reséndiz, Lucina Solís Barrera, Greta Sánchez Muñoz, Eliseo Ariel Brena Becerril, José Carlos Rocha Silva, Brenda Munguia Anaya, María Elena García Mendoza, Diana Arely Valenzuela Gutiérrez, Mariano Victorino Salazar Molina, Rogelio Zenteno Trejo, Esmeralda Dionicio García, Ana Laura Acosta Ríos

ISBN Pensamiento matemático 5, Secundaria, Modelo de Educación para la Vida, AprendeINEA: 978-607-710-419-3

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Los módulos de *Pensamiento matemático*, además de hacer valer tu derecho a la educación y bienestar social, están diseñados para que desarrolles de forma gradual tus capacidades para pensar en términos numéricos y apliques el pensamiento lógico y crítico que te permita relacionar conceptos, saberes y experiencias en la resolución de problemas de tu vida diaria, ya sea en el ámbito personal o de participación comunitaria. Adicionalmente, buscan que seas capaz de comprender la información cuantitativa de modo que construyas una opinión propia acerca de los sucesos de tu entorno inmediato, pero también del ámbito mundial.

El módulo *Pensamiento matemático 5* está diseñado para que continúes desarrollando el lenguaje algebraico al resolver ecuaciones de una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante tres métodos distintos y ecuaciones cuadráticas, con apoyo en la fórmula general. De igual forma, aplicarás estos conocimientos en la resolución de problemas espaciales mediante el uso de la semejanza de triángulos, el triángulo rectángulo y en la comprensión y utilización de la fórmula conocida como teorema de Pitágoras. Finalmente, aprenderás a trabajar con tablas, fórmulas y gráficas para calcular probabilidades.

Pensamiento matemático 5 integra conocimientos y habilidades para el desarrollo del pensamiento simbólico. El contenido se ha diseñado no solamente para la resolución de las ecuaciones sino también para entender de qué forma puede este conocimiento aplicarse en la vida diaria, y cómo se pueden simbolizar hechos cotidianos con expresiones algebraicas. Notarás que este conocimiento también se aplica en el estudio y la medición del espacio gracias a herramientas como los triángulos. Los experimentos aleatorios de probabilidad frecuencial te posibilitan el cálculo de las probabilidades de que un evento suceda, aspecto necesario para la toma de decisiones en la vida cotidiana.

Finalmente, para fortalecer y vincular los aprendizajes desarrollados en los módulos de otros ejes, en todas las secuencias se han incorporado recomendaciones sobre los conocimientos de los campos formativos de *Vida y comunidad* o *Lengua y comunicación* que puedes retomar en los temas que aquí se desarrollan y viceversa.

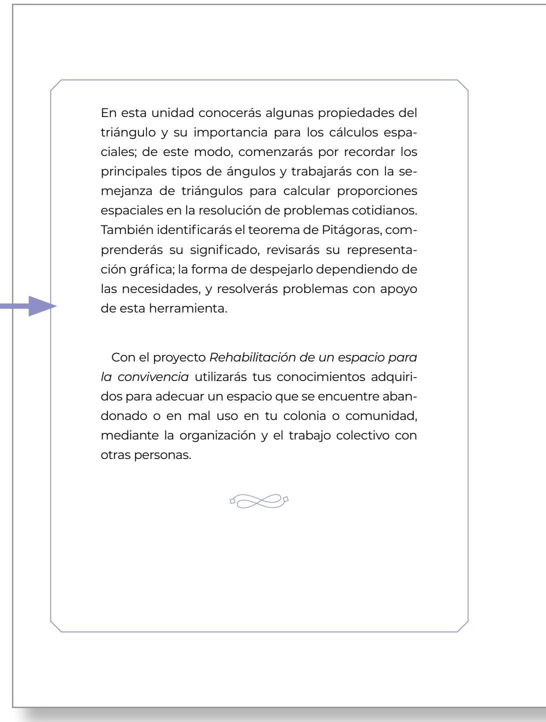
CONTENIDO

UNIDAD 2
Teorema de Pitágoras

UNIDAD 3
Probabilidad frecuencial

Conoce tu libro

A continuación, te presentamos las secciones que integran tu libro para que conozcas el propósito de cada una.



En esta unidad conocerás algunas propiedades del triángulo y su importancia para los cálculos espaciales; de este modo, comenzarás por recordar los principales tipos de ángulos y trabajarás con la semejanza de triángulos para calcular proporciones espaciales en la resolución de problemas cotidianos. También identificarás el teorema de Pitágoras, comprenderás su significado, revisarás su representación gráfica; la forma de despejarlo dependiendo de las necesidades, y resolverás problemas con apoyo de esta herramienta.

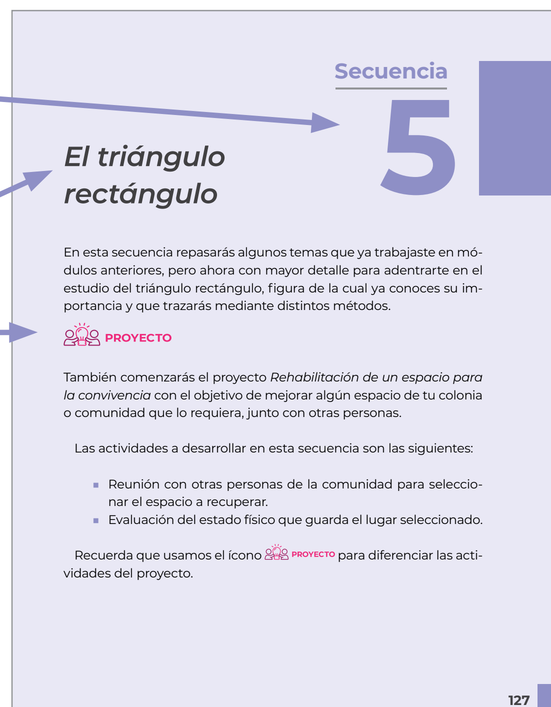
Con el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia* utilizarás tus conocimientos adquiridos para adecuar un espacio que se encuentre abandonado o en mal uso en tu colonia o comunidad, mediante la organización y el trabajo colectivo con otras personas.

Entrada de unidad

Tu libro integra 3 unidades. En cada una se indica su número y título. Cada unidad se presenta de manera general, describiendo los aprendizajes que abarca y el proyecto a desarrollar.

Secuencia didáctica

El libro tiene 12 secuencias, 4 por unidad. En cada una desarrollarás un aprendizaje significativo.



Secuencia

5

El triángulo rectángulo

En esta secuencia repasarás algunos temas que ya trabajaste en módulos anteriores, pero ahora con mayor detalle para adentrarte en el estudio del triángulo rectángulo, figura de la cual ya conoces su importancia y que trazarás mediante distintos métodos.

PROYECTO

También comenzarás el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia* con el objetivo de mejorar algún espacio de tu colonia o comunidad que lo requiera, junto con otras personas.

Las actividades a desarrollar en esta secuencia son las siguientes:

- Reunión con otras personas de la comunidad para seleccionar el espacio a recuperar.
- Evaluación del estado físico que guarda el lugar seleccionado.

Recuerda que usamos el ícono PROYECTO para diferenciar las actividades del proyecto.

127

Encuadre de la secuencia

Para comenzar, en cada secuencia encontrarás el título de esta y un párrafo en el que se resume el aprendizaje que desarrollarás. También podrás identificar las actividades del proyecto que realizarás en cada secuencia.

Proyecto

En cada unidad, planearás, desarrollarás y evaluarás un proyecto en el que realizarás acciones de beneficio comunitario y pondrás en práctica los aprendizajes desarrollados.

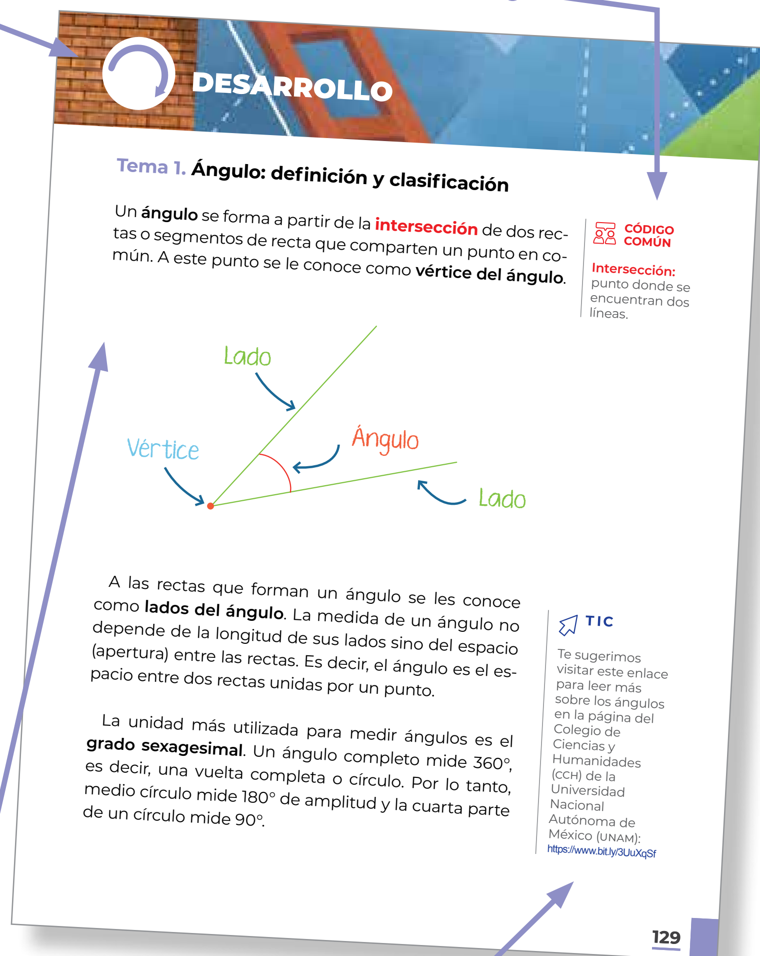
Considera que en algunos textos no se usa el lenguaje incluyente por los años en los que fueron redactados.

Código común

Conocerás la definición de palabras o términos que no son de uso cotidiano, además de información que te orientará para comprender los textos que se integran en las secuencias.

Partes de la secuencia didáctica

Todas las secuencias tienen **inicio, desarrollo** y **cierre**. Cada una está marcada con un cintillo. En el inicio reconocerás lo que ya sabes, en el desarrollo conocerás información y harás actividades para fortalecer y poner en práctica el aprendizaje. Finalmente, en el cierre, realizarás una actividad en la que pondrás en práctica lo visto en la secuencia.



DESARROLLO

Tema 1. **Ángulo: definición y clasificación**

Un **ángulo** se forma a partir de la **intersección** de dos rectas o segmentos de recta que comparten un punto en común. A este punto se le conoce como **vértice del ángulo**.

CÓDIGO COMÚN

Intersección: punto donde se encuentran dos líneas.

A las rectas que forman un ángulo se les conoce como **lados del ángulo**. La medida de un ángulo no depende de la longitud de sus lados sino del espacio (apertura) entre las rectas. Es decir, el ángulo es el espacio entre dos rectas unidas por un punto.

La unidad más utilizada para medir ángulos es el **grado sexagesimal**. Un ángulo completo mide 360°, es decir, una vuelta completa o círculo. Por lo tanto, medio círculo mide 180° de amplitud y la cuarta parte de un círculo mide 90°.

TIC

Te sugerimos visitar este enlace para leer más sobre los ángulos en la página del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM): https://www.bit.ly/3UuXqSf

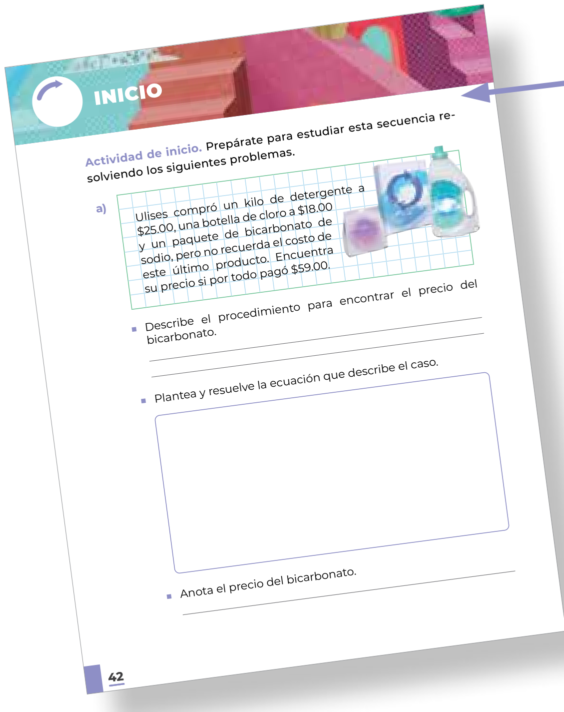
129

Temas

Cada secuencia, en su desarrollo, tiene diversos temas. En cada uno, encontrarás información medular y explicaciones que se presentan en textos breves, esquemas e infografías.

TIC

Aquí encontrarás recomendaciones para fortalecer tus habilidades digitales y sugerencias de sitios en internet para profundizar en algunos de los temas desarrollados.


INICIO

Actividad de inicio. Prepárate para estudiar esta secuencia resolviendo los siguientes problemas.

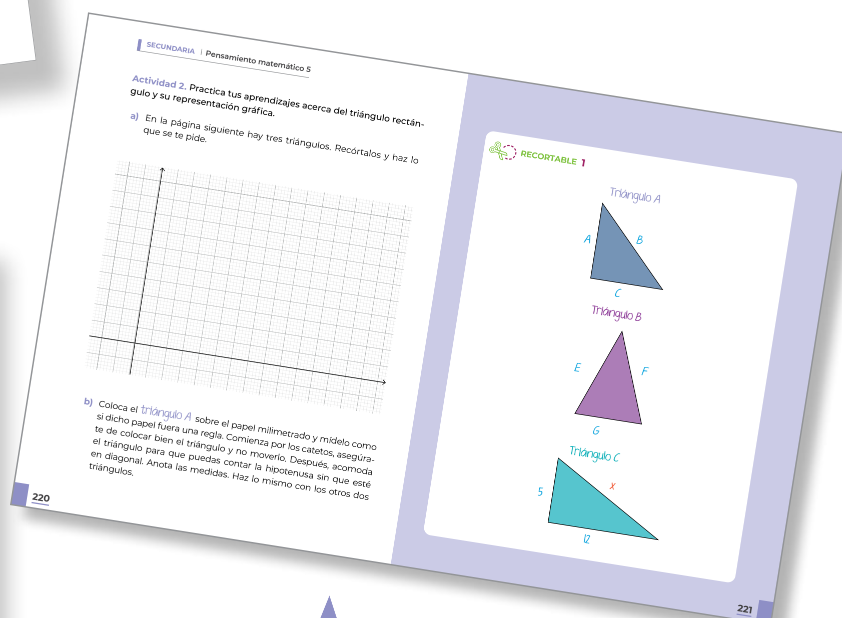
a) Ulises compró un kilo de detergente a \$25.00, una botella de cloro a \$18.00 y un paquete de bicarbonato de sodio, pero no recuerda el costo de este último producto. Encuentra su precio si por todo pagó \$59.00.

- Describe el procedimiento para encontrar el precio del bicarbonato.
- Plantea y resuelve la ecuación que describe el caso.
- Anota el precio del bicarbonato.

42

Actividad de inicio

Mediante lecturas, cuestionarios, redacciones propias, entre otras, la primera actividad de cada secuencia te permitirá vincular el aprendizaje con tu vida cotidiana y reconocer lo que ya sabes en torno a este.


SECUNDARIA | Pensamiento matemático 5

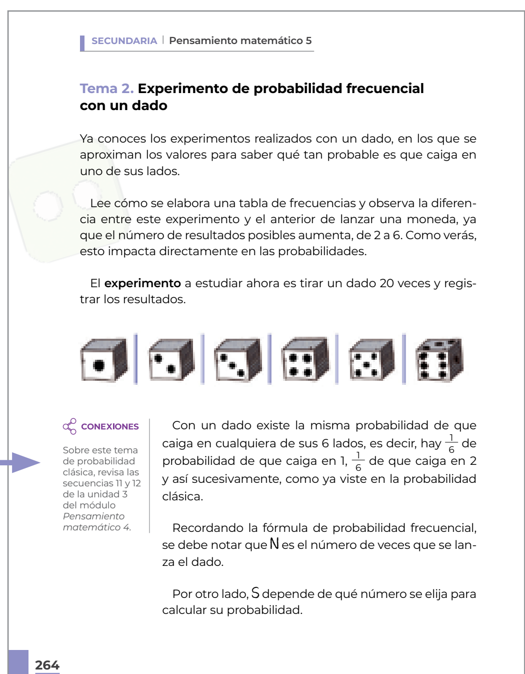
Actividad 2. Practica tus aprendizajes acerca del triángulo rectángulo y su representación gráfica.

a) En la página siguiente hay tres triángulos. Recórtalos y haz lo que se te pide.

b) Coloca el triángulo A sobre el papel milimetrado y mídelo como si dicho papel fuera una regla. Comienza por los catetos, asegúrate de colocar bien el triángulo y no moverlo. Después, acomoda el triángulo para que puedas contar la hipotenusa sin que esté en diagonal. Anota las medidas. Haz lo mismo con los otros dos triángulos.

220

221


SECUNDARIA | Pensamiento matemático 5

Tema 2. Experimento de probabilidad frecuencial con un dado

Ya conoces los experimentos realizados con un dado, en los que se aproximan los valores para saber qué tan probable es que caiga en uno de sus lados.

Lee cómo se elabora una tabla de frecuencias y observa la diferencia entre este experimento y el anterior de lanzar una moneda, ya que el número de resultados posibles aumenta, de 2 a 6. Como verás, esto impacta directamente en las probabilidades.

El experimento a estudiar ahora es tirar un dado 20 veces y registrar los resultados.

CONEXIONES
Sobre este tema de probabilidad clásica, revisa las secuencias 11 y 12 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

Con un dado existe la misma probabilidad de que caiga en cualquiera de sus 6 lados, es decir, hay $\frac{1}{6}$ de probabilidad de que caiga en 1, $\frac{1}{6}$ de que caiga en 2 y así sucesivamente, como ya viste en la probabilidad clásica.

Recordando la fórmula de probabilidad frecuencial, se debe notar que N es el número de veces que se lanza el dado.

Por otro lado, S depende de qué número se elija para calcular su probabilidad.

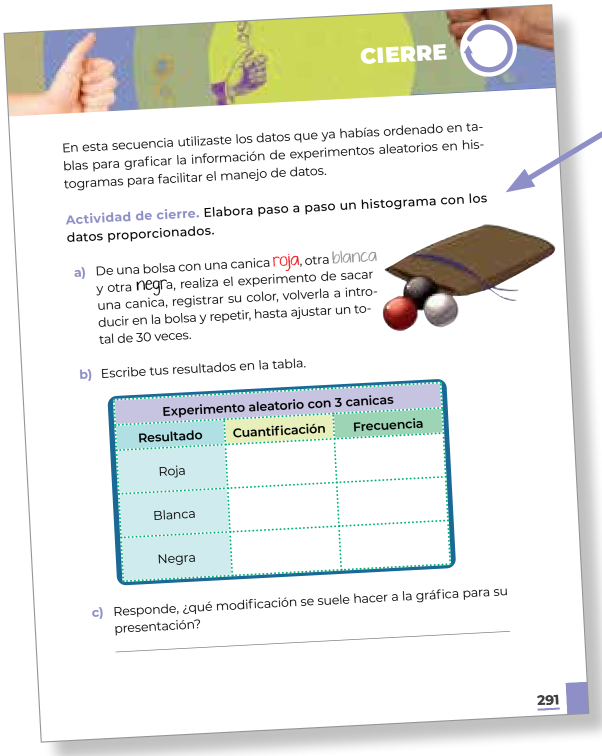
264

Actividades del desarrollo

Por cada tema, se integra una actividad, la cual está numerada y diseñada para que pongas en práctica lo visto en las lecturas.

Conexiones

Sección que te será útil para vincular el aprendizaje de una secuencia con lo visto en alguna otra, ya sea de este u otro módulo.


CIERRE

En esta secuencia utilizaste los datos que ya habías ordenado en tablas para graficar la información de experimentos aleatorios en histogramas para facilitar el manejo de datos.

Actividad de cierre. Elabora paso a paso un histograma con los datos proporcionados.

a) De una bolsa con una canica roja, otra blanca y otra negra, realiza el experimento de sacar una canica, registrar su color, volverla a introducir en la bolsa y repetir, hasta ajustar un total de 30 veces.

b) Escribe tus resultados en la tabla.

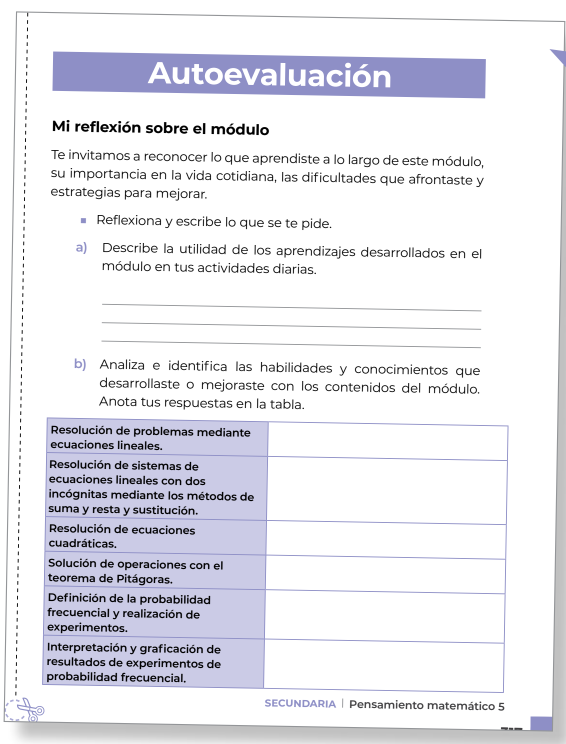
Experimento aleatorio con 3 canicas		
Resultado	Cuantificación	Frecuencia
Roja		
Blanca		
Negra		

c) Responde, ¿qué modificación se suele hacer a la gráfica para su presentación?

291

Actividad de cierre

Para finalizar cada secuencia, realizarás una actividad en la que pondrás en práctica lo visto en todos los temas. Además, evaluarás tus avances en el proyecto.


Autoevaluación

Mi reflexión sobre el módulo

Te invitamos a reconocer lo que aprendiste a lo largo de este módulo, su importancia en la vida cotidiana, las dificultades que afrontaste y estrategias para mejorar.

- Reflexiona y escribe lo que se te pide.

a) Describe la utilidad de los aprendizajes desarrollados en el módulo en tus actividades diarias.

b) Analiza e identifica las habilidades y conocimientos que desarrollaste o mejoraste con los contenidos del módulo. Anota tus respuestas en la tabla.

Resolución de problemas mediante ecuaciones lineales.	
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante los métodos de suma y resta y sustitución.	
Resolución de ecuaciones cuadráticas.	
Solución de operaciones con el teorema de Pitágoras.	
Definición de la probabilidad frecuencial y realización de experimentos.	
Interpretación y graficación de resultados de experimentos de probabilidad frecuencial.	

SECUNDARIA | Pensamiento matemático 5

Autoevaluación

A lo largo del módulo realizarás evaluaciones diagnósticas, formativas e integradoras dentro de las actividades de inicio, desarrollo y cierre.

Al final del módulo reflexionarás sobre lo aprendido y verificarás que se hayan cubierto todos los contenidos.


$(abc)^n = a^n b^n c^n$

UNIDAD 1

Ecuaciones lineales y cuadráticas

En esta unidad comprenderás la diferencia entre ecuaciones lineales y cuadráticas, trabajarás con el lenguaje algebraico y la ley de los signos para resolver ecuaciones con una incógnita mediante los métodos de suma y resta, sustitución y el método gráfico. También conocerás y utilizarás la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Con el proyecto *Visibilizo el derecho a la diversidad sexual en mi comunidad* conocerás algunos datos sobre la comunidad LGBTTTIQ+, su presencia en nuestras sociedades mediante la revisión de datos estadísticos con el propósito de promover la inclusión de todas las personas diferentes y, a la vez, iguales en derechos.

Secuencia 1

Ecuaciones lineales

En esta secuencia continuarás adentrándote en el mundo del álgebra; reconocerás las ecuaciones, qué representan, cuáles son las que al graficarse forman una recta y cómo se resuelve una ecuación con una incógnita.

PROYECTO

Comenzarás el proyecto *Visibilizo el derecho a la diversidad sexual en mi comunidad* para trabajar algebraicamente con datos estadísticos sobre la comunidad LGBTTTIQ+ para promover su respeto en las familias, el *Círculo de estudio* o la comunidad. Las actividades para esta secuencia son las siguientes:

- Lectura sobre discriminación por motivo de la orientación sexual.
- Revisión de datos poblacionales y resolución de problemas sobre el crecimiento poblacional por medio de una ecuación.
- Consulta de datos poblacionales en la página del INEGI para comparar con el resultado de la ecuación.
- Reflexión acerca de la diversidad de personas que viven en mi entidad.

Para identificar las actividades del proyecto a lo largo de la secuencia, se utiliza este ícono **PROYECTO**.

INICIO

Actividad de inicio. Te invitamos a recuperar tus aprendizajes previos sobre suma de monomios y polinomios completando el cuestionario.

a) Responde lo que se indica y desarrolla las operaciones en los casos necesarios. Guíate con el ejemplo.

1. Al sumar monomios con todas las variables iguales, como $5x + 3x$, los coeficientes:
Se suman
___

2. Al multiplicar variables que poseen exponentes enteros, como $(x^6)(x^5)$, los exponentes:
___

3. Cuando una variable no tiene exponente, como en $8x$, significa que el exponente es el número:
___

4. El resultado de simplificar la expresión $3x - 2y + 3x - 2$ es:
___

5. El resultado de simplificar la expresión $4x^2 - 2x + 3x$ es igual a:

___

6. El resultado de simplificar la expresión $8x - 6 + 4x$ es igual a:

___

7. El resultado de multiplicar $(3x)(2x - 4y)$ es igual a:

___

b) Subraya la respuesta correcta.

1. En la expresión $x^3 + 5$, ¿qué operación representa el número 3?

- Una suma
- Una resta
- Una división
- Una potencia

2. En la expresión $9x \div 5$, ¿qué operación hay entre el número 9 y la x?

- Una suma
- Una resta
- Una división
- Una multiplicación

3. En la expresión $9x^4 + 7$, ¿qué operación hay entre el número 7 y el monomio $9x^4$?
   - Una suma
   - Una resta
   - Una división
   - Una potencia

4. En la expresión $\frac{2x}{2}$, ¿qué operación hay entre $2x$ y el número 2?
   - Una suma
   - Una resta
   - Una división
   - Una potencia

5. En la expresión $12x + 7$, ¿qué operación hay entre el monomio $12x$ y el número 7?
   - Una suma
   - Una resta
   - Una división
   - Una potencia

DESARROLLO

Tema 1. Las ecuaciones y las ecuaciones lineales

Una **ecuación** representa una **igualdad entre dos cantidades o expresiones**, que pueden ser numéricas o algebraicas; es decir, que incluyen letras como x, y, z, por ejemplo.

Recuerda que en el lenguaje algebraico se utilizan números y letras para expresar valores desconocidos. A estas letras se les conoce con el nombre de **literales**.

Cuando las literales tienen un único valor se llaman **incógnitas,** pero cuando pueden tomar distintos valores reciben el nombre de **variables**.

La expresión algebraica $x + 2 = 0$ es una ecuación que indica que al sumar x más 2 el resultado es igual a 0. Así, el lado izquierdo de esta ecuación está formado por el binomio $x + 2$, mientras que su lado derecho está formado solo por el número 0.

$$x + 2 = 0$$

Cuando haces sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, utilizas el signo igual ($=$) para indicar que se busca el resultado de una operación, como si fuera una instrucción para resolverla y agregar el resultado.

También, el signo igual ($=$) es **la expresión de igualdad o equivalencia.**

CONEXIONES

Repasa el tema de las partes que componen un monomio en la secuencia 1 de la unidad 1 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

Revisa también en la unidad 2 del mismo módulo el tema de las funciones y cómo se elabora una gráfica en el plano cartesiano.

En álgebra se hace evidente su significado de **equivalencia** y de **equilibrio**, es decir, lo que está del lado izquierdo del signo igual es equivalente a lo que está del lado derecho. Por eso, en una ecuación se puede encontrar más de un término del lado derecho del signo igual, como en el caso siguiente:

lado izquierdo $\rightarrow$ $2a + 4 \; \boxed{=} \; a - 9$ $\leftarrow$ lado derecho

Donde se considera que ambos binomios son equivalentes.

Ejemplos:

$x + 5 = 7$

$y + x = 16$

$2x + 1 = -9$

$m - 6n = n - 15$

$4x + 2 = 15$

$10q + 45 = -2 - q$

$9k - 8 = k - 1$

$c + d = 16$

CONEXIONES

Recuerda que cuando el exponente es 1, no se escribe. Repasa el grado de un polinomio en la secuencia 2 de la unidad 2 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

Cuando en cualquiera de las literales el exponente más grande es 1, se dice que la ecuación es **lineal**. Esto, porque cuando se hace la gráfica de este tipo de ecuaciones, siempre resulta el dibujo de una línea recta, como también ya viste al graficar una función.

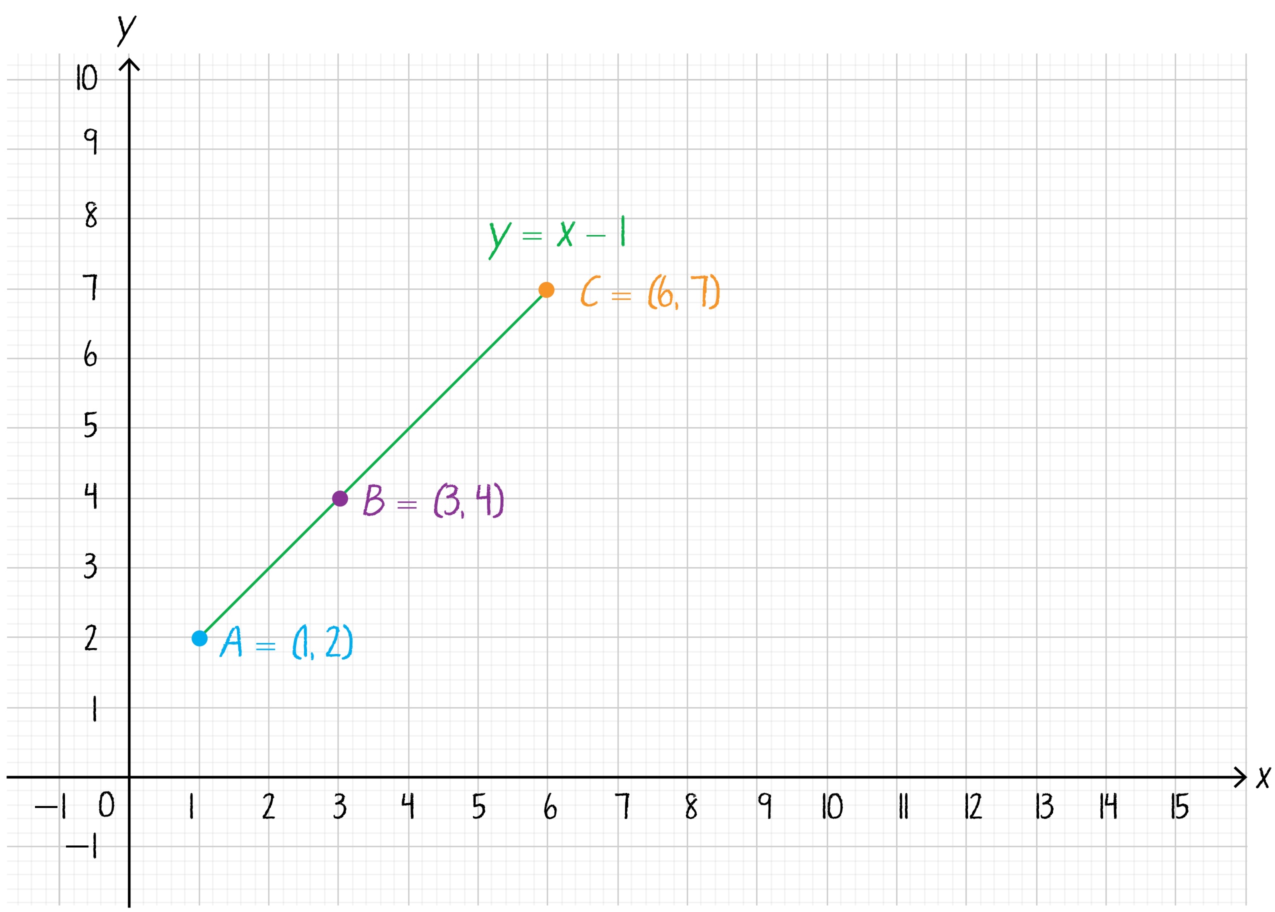
Por lo anterior, la ecuación $2 - 5x = 17$ es una ecuación lineal, ya que el exponente de la x es 1.

Observa los siguientes ejemplos de ecuaciones lineales, en cada una el exponente más grande que tiene cualquiera de las literales es 1.

$x + 5 = 7$
$4 - x = 1$
$2 + a = 7$
$m - 6 = -15$

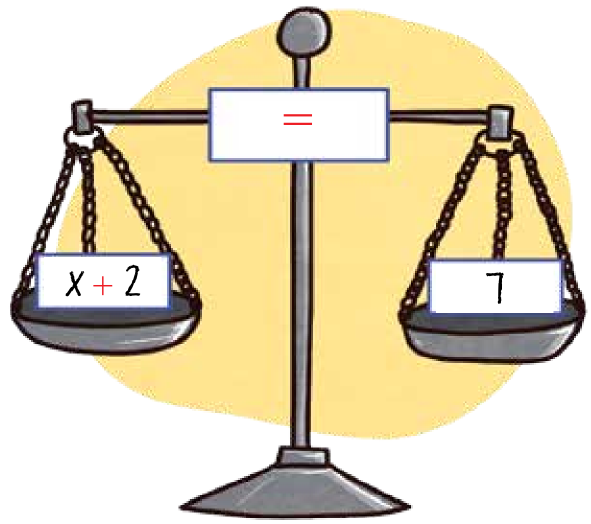
$x + 0 = 3$
$10q + 45 = -2$
$9k - 8 = k - 1$
$c + d = 16$

Al graficar los valores de una ecuación lineal resulta una línea recta como la que observas en el siguiente plano cartesiano.



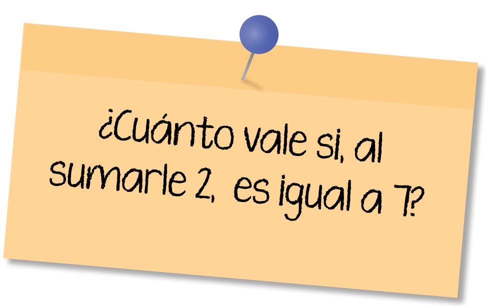
Como el signo igual (=) que divide los lados derecho e izquierdo de una ecuación representa una equivalencia, una ecuación puede compararse con una balanza, en la que los dos platos están en equilibrio.

En el caso de la ecuación $x + 2 = 7$, al compararla con una balanza, la verías de la siguiente forma:



Comparar una ecuación con una balanza ayuda a entender cómo se resuelve, es decir, cómo encontrar el valor numérico de la literal que hace que la igualdad se cumpla.

$$x + 2 = 7$$



Para resolver una igualdad, se busca dejar sola a la literal en cualquiera de los lados de la ecuación y colocar todos los números y, en su caso, otras literales, del otro lado del signo igual. Esto se llama **despejar la incógnita**.

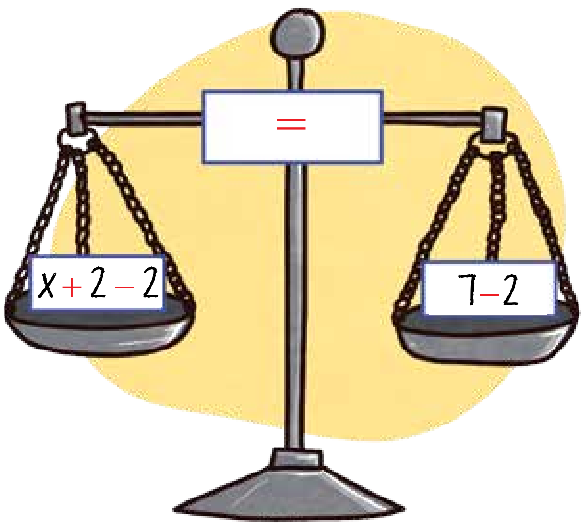
Durante el proceso para despejar una literal en una ecuación, la **igualdad** entre sus lados izquierdo y derecho debe mantenerse en todo momento.

Para ello, cualquier operación que se realice del lado izquierdo de la igualdad debe realizarse también del lado derecho de la misma, ya que solo de esta forma la igualdad se mantendrá.

Lo anterior equivale a considerar que, si se agrega cualquier peso a uno de los platos de la balanza, debe agregarse ese mismo peso al otro plato para que el equilibrio se mantenga.

Dado que **despejar una variable** equivale a dejarla sola en cualquiera de los lados del signo igual, para despejar la x de la ecuación $x + 2 = 7$ es necesario quitar el 2 del lado izquierdo de la igualdad.

Esto puedes hacerlo si le restas 2, pero para que la igualdad se mantenga, también debes restarle 2 al lado derecho de la ecuación. Esto, representado en la balanza, se ve de la siguiente manera:



Y algebraicamente se escribe:

$$x + 2 - 2 = 7 - 2$$

A continuación, como $2 - 2 = 0$, la x ha quedado sola del lado izquierdo del signo igual, mientras que en el lado derecho el 5 queda también solo porque $7 - 2 = 5$.

Así, se puede ver que:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 7 \\ x + 2 - 2 &= 7 - 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Para comprobar si este valor numérico hace cumplir la igualdad, hay que sustituirlo en la ecuación original:

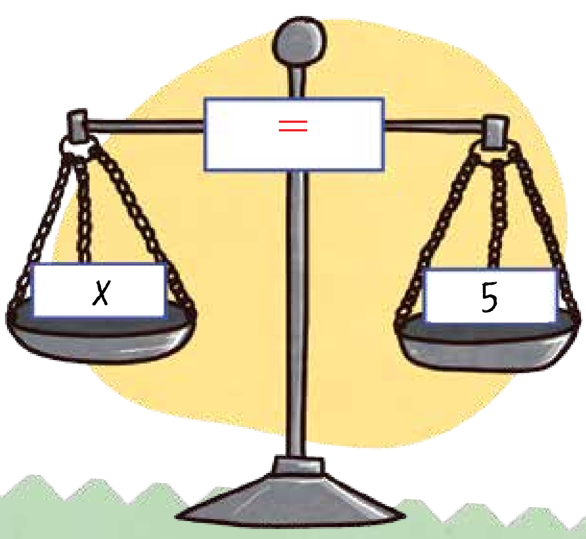
$$\boxed{x + 2 = 7}$$

Se sustituye:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 7 \\ (5) + 2 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

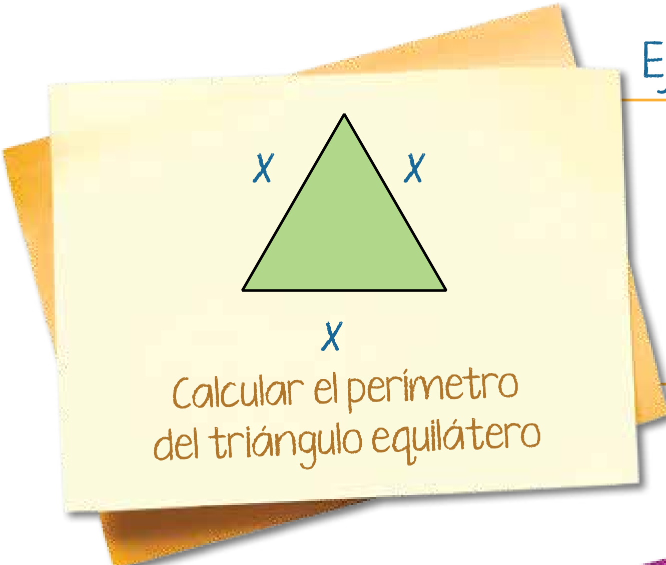
Como la igualdad de $7 = 7$ se cumple, el valor de $x = 5$ es correcto.

¡La ecuación ha sido resuelta!



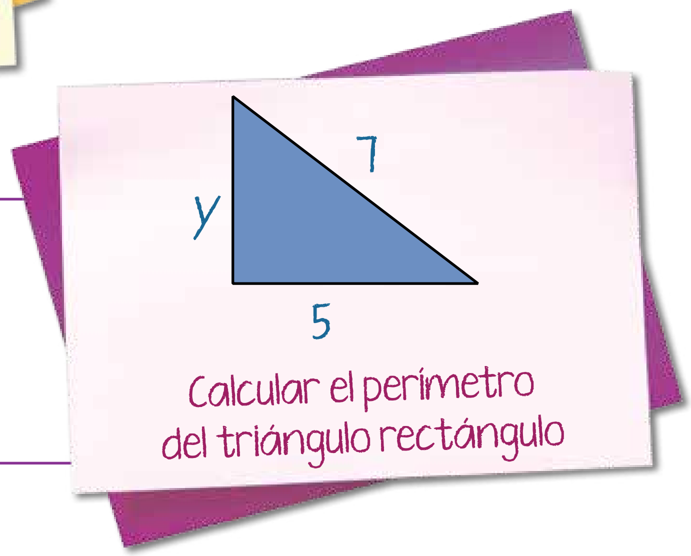
Actividad 1. Pon a prueba tus aprendizajes y haz lo que se te pide a continuación.

a) Subraya la expresión que representa el cálculo que se pide en cada figura. Sigue el ejemplo.

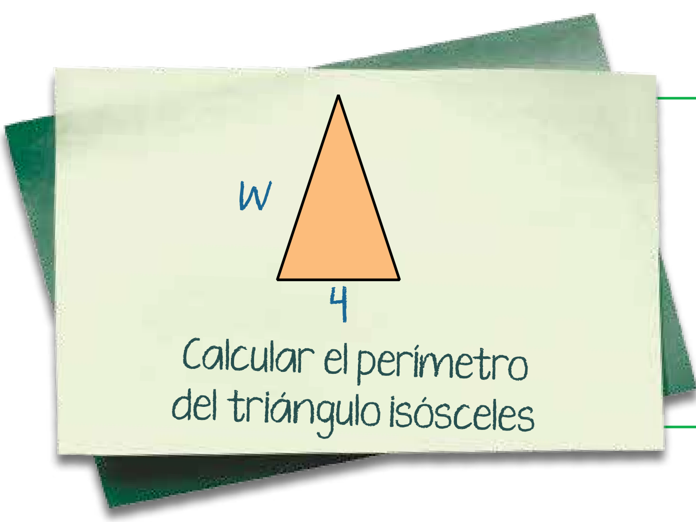


Ejemplo:

- $\underline{P = x + x + x}$
- $P = (x)(x)(x)$
- $P = 4x$



- $P = 5 + 7$
- $P = 7 + 5 + y$
- $P = y + y + y$



- $P = w + 4$
- $P = w + w + 4$
- $P = 4 + 4 + w$

b) Resuelve las ecuaciones siguientes.

$4 + x = 11$

$6 + x = 18$

$5 + x = 9$

$x - 4 = 10$

PROYECTO

a) Te invitamos a leer el siguiente texto, es un fragmento de la Presentación del *Glosario de la diversidad sexual, de género y características sexuales* editado por la Secretaría de Gobernación y el Consejo Nacional para Prevenir la Discriminación (CONAPRED).

Lee en voz alta

Comparte la lectura

REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA ■ LA MATEMÁTICA ■

Presentación del Glosario de la diversidad sexual, de género y características sexuales

En México, la discriminación por orientación sexual, identidad y expresión de género y características sexuales es un **fenómeno estructural**. Lejos de limitarse a casos aislados o aleatorios, esta forma de exclusión se manifiesta en acciones repetidas y generalizadas que –sobre la base de estereotipos– restringen los derechos de las personas. Prácticamente todas las instituciones facilitan (o favorecen) las diferencias de trato injustificadas: desde las familias, donde se excluye a hijos e hijas que no se ajustan a las expectativas sociales, hasta escuelas, centros laborales o el Estado, cuyas políticas tienden incluso a ignorar la diversidad. Esto se ha reproducido a lo largo de la historia por generaciones.

Las prácticas y **procesos excluyentes** son un obstáculo para el desarrollo. La discriminación impide, sin justificación alguna, que todas las personas accedan a los mismos derechos. Por una parte, contraviene normas y principios internacionales que forman el núcleo de la igualdad y la no discrimi-

CÓDIGO COMÚN

Fenómeno estructural: hecho que se presenta en la sociedad relacionado con la organización de la misma. Por ejemplo, la migración y la discriminación.

Procesos excluyentes: son aquellos mediante los cuales se aparta o impide la participación de cierto grupo de personas en todas o parte de las actividades de la sociedad en la que viven.

nación; por otra, la discriminación niega la dignidad de las personas y ocasiona que grandes sectores sociales enfrenten amplias dificultades para lograr su potencial o poner su talento en práctica. Ante esto, el llamado a construir un México incluyente es esencial para crecer y desarrollarnos como país.

Las prácticas y procesos excluyentes son un obstáculo para el desarrollo. La discriminación impide, sin justificación alguna, que todas las personas accedan a los mismos derechos. Por una parte, contraviene normas y principios internacionales que forman el núcleo de la igualdad y la no discriminación; por otra, la discriminación niega la dignidad de las personas y ocasiona que grandes sectores sociales enfrenten amplias dificultades para lograr su potencial o poner su talento en práctica. Ante esto, el llamado a construir un México incluyente es esencial para crecer y desarrollarnos como país.

La discriminación encuentra su raíz en los prejuicios. En consecuencia, parte de la solución **estriba** en aportar elementos que desde la ciencia –social, jurídica, médica– permitan visibilizar, entender y combatir nuestras **preconcepciones**. Ello es esencial para el reconocimiento y la valoración de la diversidad humana. Sólo así podremos hacer del derecho a la igualdad y no discriminación una realidad.

CÓDIGO COMÚN

Estriba: que se apoya en algo.

Preconcepción: idea sobre cierto tema que se tiene antes de conocerlo.

Fuente: Suárez Cabrera, Julia Marcela (Coord.), "Presentación", en *Glosario de la diversidad sexual, de género y características sexuales*, Segob, Conapred, México, 2016, pp. 5-6. disponible en http://www.conapred.org.mx/documentos_cedoc/Glosario_TDSyG_WEB.pdf (Consulta: 7 de febrero de 2023). (Fragmento).

b) Reflexiona sobre el texto y responde lo siguiente.

1. ¿Cuántos personas habitan la República mexicana?

2. ¿Conoces a personas **transgénero**?

3. Describe un caso de discriminación de una persona por su orientación sexual, identidad y expresión de género que conozcas.

CÓDIGO COMÚN

Transgénero: persona que no se identifica con el sexo o género con el que nació.

4. ¿A qué se refiere la lectura cuando menciona que la discriminación encuentra su raíz en los prejuicios?

5. ¿De qué forma piensas que se puede prevenir o eliminar la discriminación por orientación sexual?

La información estadística sirve para que las personas ciudadanas conozcan acerca de temas que no están suficientemente visibilizados en la sociedad, como la cantidad de personas que viven en el país, sus características y preferencias.

Para este proyecto, comenzarás por conocer la cantidad de personas que vive en el país, y para ello utilizaremos la información del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

Entre los censos que organiza el INEGI está el de Población y Vivienda que se levanta cada 10 años. Este instituto también aplica una encuesta intercensal a la mitad de ese periodo. Así, entre el Censo Nacional de Población y Vivienda 2010 y 2020 se tiene la Encuesta Intercensal 2015.

Conociendo algunos datos es posible calcular otros planteando una ecuación. Por ejemplo, si se calculó el aumento de la población en México entre 2015 y 2020 en 6 075 551 habitantes y el censo del 2020 dio como resultado 126 014 024 habitantes, ¿cuál fue el resultado de la encuesta del año 2015?

La siguiente ecuación representa la información anterior:

$$x + 6\,075\,551 = 126\,014\,024$$

Donde x representa el número de habitantes de México según los datos de la encuesta intercensal 2015.

a) Resuelve la ecuación en el siguiente espacio.

$$x + 6\,075\,551 = 126\,014\,024$$

b) Recurre a la página del INEGI para revisar tu resultado. Consulta la gráfica interactiva *Población total* y conoce la información que presenta.

TIC

Además de revisar tu resultado, te invitamos a navegar por esta página para que conozcas más información sobre la población de México.
http://bit.ly/3OBjwAE

Tema 2. Resolución de problemas a partir de una ecuación

A continuación, verás un ejemplo de cómo plantear ecuaciones para resolver problemas de la vida cotidiana.

Fabiola fue a la tienda y compró tres paquetes de galletas integrales caseras, pagó con un billete de \$100 pesos y recibió \$40 de cambio. ¿Cuánto le costó cada paquete de galletas?

Para saber cuánto pagó ella por cada paquete, puedes hacer una ecuación que represente el problema y lo resuelva.

Para plantear una ecuación:

- Identifica qué se está buscando. Esto se expresa por lo general con una pregunta; en el problema de Fabiola.

- Nombra el dato que se busca con una letra o literal. Por lo general se utiliza la letra x.

  En el caso del problema de Fabiola, tienes que:

$$x = \text{precio de cada paquete de galletas}$$

- Revisa tus datos y observa de qué manera se relacionan entre sí para escribir esa relación en términos de una ecuación.

En este caso, sabes que Fabiola compró 3 paquetes de galletas, que pagó con un billete de $100 pesos y le dieron $40 de cambio.

Es decir, ella pagó tres veces el precio de cada paquete de galletas. Eso, en álgebra, se escribe como $3x$ porque es una multiplicación:

$$3x = \text{tres veces el precio de cada paquete}$$

Además, pagó con un billete de $100 pesos y le regresaron $40, es decir que las galletas le costaron 100 – 40 pesos.

Entonces, la ecuación es:

$$3x = 100 - 40$$

En este caso, para despejar la x es necesario quitarle el número 3 que la acompaña.

Ese número 3 es el coeficiente de la x, lo que significa que el 3 está multiplicando a la x.

Por lo tanto, para quitarlo de la x necesitas dividir $3x$ entre 3; como 3 entre 3 es igual a 1 queda sola la x. Recuerda que para mantener la igualdad en una ecuación, al dividir entre 3 el término del lado izquierdo es necesario dividir también el lado derecho de la ecuación entre 3. De esta forma:

$$\frac{3x}{3} = \frac{100 - 40}{3}$$

Al dividir 3 entre 3 del lado izquierdo de la ecuación, obtienes que:

$$x = \frac{100 - 40}{3}$$

Ahora, para conocer el valor de la x, basta con realizar las operaciones que aparecen del lado derecho de la ecuación.

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

TIC

Practica más ejercicios de ecuaciones lineales en el siguiente enlace, que te dirigirá a la platafoma del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
https://bit.ly/3fm8C4W

Lo que significa que cada paquete de galletas le costó \$20 a Fabiola. Para comprobar el resultado, solo tienes que sustituir el valor de $x = 20$ en la ecuación original que planteaste.

Como la igualdad se cumple ($60 = 60$), el valor de $x = 20$ es correcto.

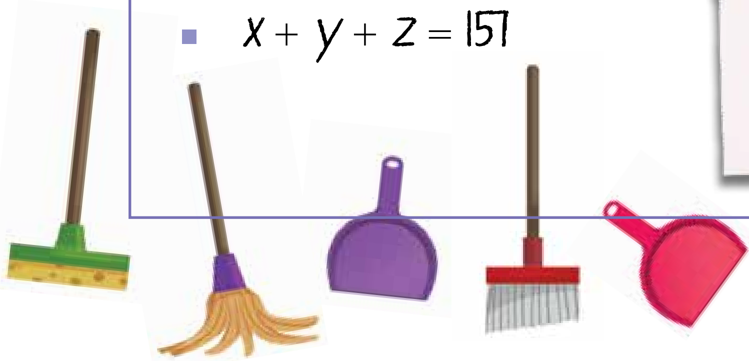
Actividad 2. Lee cada situación y subraya la ecuación que la representa.

En una frutería se vende por pieza. Mientras Martha esperaba en la fila, observó que un cliente pagó $200.00 por 4 sandías y recibió $20 de cambio. ¿Cuál ecuación representa el precio de cada sandía?

- $x^4 = 200 - 20$
- $4x + 200 = 20$
- $200 - 4x = 20$

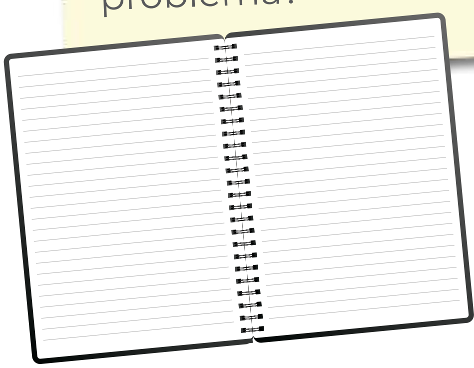
Pablo fue a la tienda a comprar utensilios de limpieza para su hogar. Si compró 3 escobas, 2 recogedores y 4 trapeadores, y en total gastó $157, ¿cuál es la ecuación que representa el problema?

- $3x + 2y + 4z + 157 = 0$
- $3x + 2y + 4z = 157$
- $x + y + z = 157$



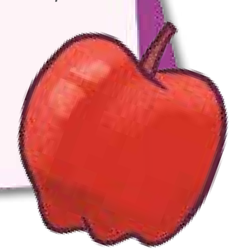
Alejandra desea calcular el largo y el ancho de su libreta, pero no cuenta con una regla. Sin embargo, en la cubierta de la libreta está escrito que tiene un área de 390 cm^2.
¿Cuál ecuación representa este problema?

- $x + y + x + y = 390$
- $xy = 390$
- $x = 390 - y$



Rigoberto ha estado comiendo 3 manzanas todos los días. La última vez compró 16 piezas.
Si todavía le quedan 6 manzanas el día de hoy y desea conocer cuántos días han pasado, ¿cuál sería la ecuación que representa el problema?

- $16 - 3x = 6$
- $16 + 6 = 3x$
- $3x + 16 = 6$



El sueldo de Sergio es de \$200 diarios, pero los días festivos recibe un bono de \$150. Si este mes trabajó durante 24 días y recibió un pago de \$5 250, pero no sabe cuántos de esos días fueron festivos, ¿cuál sería la ecuación que representa el problema?

- $24(200) + 150x = 5250$
- $150x = 24 + 200 + 5250$
- $24x = 5250 - 200$

PROYECTO

a) De acuerdo con la información que revisaste en el apartado anterior, retoma el dato del total de la población en México, de acuerdo con el Censo de Población y Vivienda, y escríbelo aquí.

____

b) En la misma página del INEGI investiga con familiares, amistades u otras personas de tu *Círculo de estudio* la cantidad población de tu estado y municipio. Para ello, entren al submenú Mapas, elijan su estado y luego su municipio. Anota las respuestas:

Estado:

Población estatal:

Población municipal:

c) Reúnete con otras personas de tu comunidad, tu familia, amistades o integrantes de tu *Círculo de estudio* para investigar en qué consiste la comunidad LGBTTTIQ+. Anota lo que investigaste.

d) Investiga alguna fuente de información confiable que proporcione datos estadísticos acerca de las personas de la comunidad LGBTTTIQ+ en México. Anota las fuentes que encontraste.

CIERRE

En esta secuencia aprendiste qué es una ecuación, cuáles son las ecuaciones lineales, cómo se plantean y resuelven; asimismo, encontraste situaciones de la vida cotidiana en las que es posible utilizar una ecuación para resolver un problema.

Actividad de cierre. Resuelve las ecuaciones y compruébalas en tu libreta; después escribe el valor de x para cada caso.

a) $3x + 2 = 4 + x$

$x =$ ☐

b) $6x = 4x + 8$

$x =$ ☐

c) $9x + 2x - 5x = 0$

$x =$ ☐

d) $x + 6 = 2$

$x =$ ☐

e) $3x + 2x = 5 + 10$

$x =$ ☐

f) $4x - 10x = 12$

$x =$ ☐

g) $-5x - 7 = 2x$

$x =$ ☐

h) $8x - 5 = 7x + 4$

$x =$ ☐

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Leí sobre la discriminación de personas por motivo de su orientación sexual.	
Revisé datos poblacionales y resolví una ecuación para conocer el número de habitantes en México en 2015.	
Consulté datos poblacionales en la página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) para corroborar el resultado de la ecuación.	
Consulté datos poblacionales estatales y municipales y reflexioné sobre la diversidad de personas que viven en mi estado.	

Secuencia

2

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En esta secuencia te enfocarás en la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para ello, reconocerás y practicarás dos de los tres métodos más utilizados para resolverlas: el método de suma y resta y el método de sustitución.

PROYECTO

Continuarás también con el desarrollo del proyecto *Visibilizo el derecho a la diversidad sexual en mi comunidad*, con las actividades siguientes:

- Resolución de un sistema de ecuaciones sobre demografía con el método de sumas y restas o sustitución.
- Interpretación, reflexión y socialización de información sobre la cantidad de personas que declaran pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+.

Como en secuencias anteriores, el ícono **PROYECTO** distingue las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Prepárate para estudiar esta secuencia resolviendo los siguientes problemas.

a) Ulises compró un kilo de detergente a \$25.00, una botella de cloro a \$18.00 y un paquete de bicarbonato de sodio, pero no recuerda el costo de este último producto. Encuentra su precio si por todo pagó \$59.00.

- Describe el procedimiento para encontrar el precio del bicarbonato.

____

____

- Plantea y resuelve la ecuación que describe el caso.

- Anota el precio del bicarbonato.

____

b)

Si a los dos días Ulises compra los mismos productos con iguales precios, pero también adquiere una botella grande de vinagre, de la que tampoco recuerda su costo, solo que pagó con un billete de $100 y le devolvieron $6 pesos, ¿cuál es el precio del vinagre?

Artículos	Precio
1 bolsa de detergente	$ 25
1 litro de cloro	$ 18
1 paquete de bicarbonato	?
1 botella de vinagre	?

- Describe el procedimiento para encontrar el precio del vinagre:

___

___

___

- Plantea y resuelve la ecuación correspondiente.

- Anota el precio del vinagre.

___

c) Plantea una ecuación donde x sea el precio del bicarbonato y y el precio del vinagre.

d) ¿Cuántas incógnitas tiene la ecuación que planteaste?

e) Resuelve la ecuación sustituyendo el valor de x por el precio del bicarbonato.

f) Si no conocieras el valor del bicarbonato, ¿podrías calcular el valor de y? ¿Por qué?

DESARROLLO

Tema 1. Resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas

¿Qué sucede cuando en una ecuación se desconoce el valor no de una, sino de dos variables, como en la actividad anterior, en la que se desconocía el precio del bicarbonato y del vinagre?

CONEXIONES

Revisa en la secuencia anterior de esta unidad y módulo la diferencia entre incógnita, variable y literal.

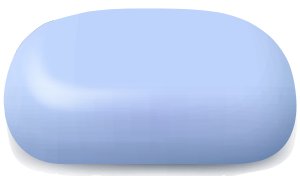
En esa situación se conocía el precio de dos productos que compró Ulises: el detergente (\$25) y el cloro (\$18); se desconocía el precio de otros dos productos, que son el bicarbonato de sodio y el vinagre. Se sabe que, por los cuatro, Ulises pagó con un billete de \$100 y le devolvieron \$6 de cambio. La ecuación para encontrar los precios faltantes es la siguiente:

$$25 + 18 + x + y = 94$$

Donde:
x = precio del bicarbonato
y = precio del vinagre

Esta ecuación tiene dos literales, por lo tanto no se puede resolver de la forma como se hacía en la secuencia anterior. Para resolverla, ayuda contar con otra ecuación que tenga las mismas literales.

A los pocos días, Ulises acude de nuevo a la tienda. En esta ocasión adquiere otro paquete de bicarbonato, una botella de vinagre y un jabón de tocador que cuesta \$12, y paga por los tres productos \$63.



La ecuación que representa sus compras es la siguiente:

$$x + y + 12 = 63$$

¿Qué relación tienen las dos ecuaciones?

$$25 + 18 + x + y = 94$$

$$x + y + 12 = 63$$

Que ambas **representan** una parte de la misma situación problemática: incluyen los precios desconocidos.

CONEXIONES

Repasa en la secuencia 1 de esta unidad y módulo cómo identificar una ecuación lineal.

Un **sistema de ecuaciones** es el conjunto de dos o más ecuaciones que resultan de una situación problemática que se busca resolver.

Un sistema de dos **ecuaciones lineales con dos incógnitas** es aquel que tiene las mismas dos literales en ambas ecuaciones, como en el caso de las compras de Ulises.

En las ecuaciones lineales todas sus literales tienen como exponente el 1. Para que se hable de un **sistema de ecuaciones** con dos incógnitas, se deben tener **las mismas dos incógnitas en ambas ecuaciones** y el sistema debe **compartir un valor para cada literal que las resuelve.**

En las ecuaciones de los precios de Ulises se cumple esta condición, ya que en ambas la x representa el precio del bicarbonato y la y, el precio del vinagre; además, tienen los mismos valores en ambos casos porque dichos productos no aumentaron de una compra a otra ni estaban en oferta.

Por esta razón no se denotan con literales distintas en ambas ecuaciones. En otras palabras, una incógnita no puede denotarse con x en una ecuación y con a en la otra: debe tener las mismas literales en las dos ecuaciones.

En este sistema de ecuaciones, las dos tienen las mismas literales: x y y.

$$\begin{cases} 25 + 18 + x + y = 94 \\ x + y + 12 = 63 \end{cases}$$

En un sistema de ecuaciones se suele ordenar a las incógnitas en un solo lado de la igualdad, para que del otro solo quede un número.

Dar solución a un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de x y de y que dan solución a todas las ecuaciones que lo componen.

Actividad 1. Haz lo que se indica.

a) Relaciona con una línea las ecuaciones que tienen las mismas literales.

- $6x + y = 27$ — $-12a - 5b = -87$
- $15a - 11b = -87$ — $-3x + 7y = 9$
- $13y + z = 31$ — $2y + 4z = 24$

b) Lee la situación, escribe qué representa cada incógnita y plantea el sistema de ecuaciones. Sigue el ejemplo.

Julio tiene \$850 en su cartera en billetes de \$100 y \$50. Si en total contó 11 billetes, ¿cuál sistema de ecuaciones resulta de esta situación?

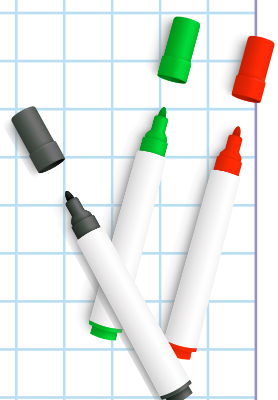
x = billetes de \$100

y = billetes de \$50

Sistema de ecuaciones:

$100x + 50y = 850$
$x + y = 11$

Eréndira tiene plumones rojos y verdes, que suman 7. Si le regalan 5 plumones negros y ahora tiene 12 en total, ¿qué sistema de ecuaciones representa esta situación?



x = ____________________

y = ____________________

Sistema de ecuaciones:

Tema 2. Método de suma y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales

El método de resolución de ecuaciones por suma y resta consiste en sumar las dos ecuaciones con el fin de que una de las incógnitas involucradas se elimine, para así encontrar el valor de la otra.

Para eliminar una **incógnita**, es necesario hacer que tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con signos contrarios.

Si esta condición no se presenta en el sistema de ecuaciones, es necesario multiplicar una de las ecuaciones por el coeficiente que tiene la incógnita que se quiere eliminar en la otra ecuación, pero con el signo contrario.

Observa cómo resolver un sistema de ecuaciones, paso a paso.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -9 & \textbf{Ecuación 1 (1)} \\ -4x + y = 7 & \textbf{Ecuación 2 (2)} \end{cases}$$

Para facilitar el proceso de resolución se identifica a cada ecuación con un número.

Paso 1

Se identifica cuál de las dos incógnitas conviene eliminar. En este caso se elige la y, ya que tiene signos contrarios en las ecuaciones: en la ecuación **(1)** el coeficiente de y es 2, por lo que para eliminarla bastará con multiplicar la ecuación **(2)** por el número 2 para que la y quede con el mismo coeficiente, pero con el signo contrario.

$$
\begin{array}{lr}
3x - \boxed{2y} = -9 & \quad (1) \\
-4x + \boxed{y} = 7 & \quad (2)
\end{array}
$$

$$2(-4x + y = 7)$$

Paso 2

Al multiplicar la ecuación **(2)** por 2 resulta una nueva ecuación, que se llamará ecuación **(3)**.

$$
\begin{array}{lr}
2(-4x + y = 7) & \\
-8x + 2y = 14 & \quad (3)
\end{array}
$$

Paso 3

Ahora se suman las ecuaciones **(1)** y **(3)**.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 3x & - & 2y & = & -9 & \quad (1) \\
+ & -8x & + & 2y & = & 14 & \quad (3) \\
\hline
 & -5x & + & 0 & = & 5 &
\end{array}
$$

Paso 4

A continuación, de esta ecuación se despeja la x y se obtiene su valor.

$$-5x = 5$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{5}{-5}$$

$$x = -1$$

Paso 5

Después, se sustituye el valor de x en la ecuación **(1)** y se despeja la y para saber cuánto vale.

$$3x - 2y = -9$$

$$3(-1) - 2y = -9$$

$$-3 - 2y = -9$$

$$-2y = -9 + 3$$

$$-2y = -6$$

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-6}{-2}$$

$$y = \frac{-6}{-2} = 3$$

Para comprobar si los valores de x y de y resuelven el sistema de ecuaciones, se sustituyen en las ecuaciones originales **(1)** y **(2)**.

$$3x - 2y = -9 \quad \textbf{(1)}$$

$$3(-1) - 2(3) = -9$$

$$-3 - 6 = -9$$

$$-9 = -9$$

$$-4x + y = 7 \quad \textbf{(2)}$$

$$-4(-1) + (3) = 7$$

$$4 + 3 = 7$$

$$7 = 7$$

Si al sustituir los valores de x y de y, y resolver las operaciones se obtiene el mismo resultado en ambos lados del signo igual, se cumple la igualdad para las dos ecuaciones y, por lo tanto, los valores de x y de y son correctos y resuelven el sistema.

Actividad 2. **Resuelve con el método de suma y resta los sistemas de ecuaciones que se muestran a continuación, y encierra en un círculo los valores de x y y que coincidan con tu resultado.**

$$4x + 3y = 27$$
$$-2x + y = -1$$

Opciones de resultados:

$x = -3$ $y = 5$	$x = 3$ $y = 5$	$x = 3$ $y = -5$

$$3x - 2y = 10$$
$$5x + 3y = 4$$

Opciones de resultados:

$x = 2$
$y = -2$

$x = -2$
$y = -2$

$x = 2$
$y = 2$

$$-x + 4y = 0$$
$$2x - 5y = 6$$

Opciones de resultados:

$x = 8$
$y = 2$

$x = -8$
$y = -8$

$x = 8$
$y = -2$

Tema 3. Método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Hay una segunda forma de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que se llama método de sustitución.

Observa paso a paso cómo se resuelve el mismo sistema de ecuaciones lineales del tema anterior con este otro método.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -9 & \textbf{Ecuación 1 (1)} \\ -4x + y = 7 & \textbf{Ecuación 2 (2)} \end{cases}$$

Para facilitar el proceso de resolución se identifica a cada ecuación con un número.

Paso 1

Se elige una ecuación, de la cual se despeja una de las incógnitas. En este caso, se despejará la y de la ecuación **(2)**.

A esta nueva ecuación se le llamará ecuación **(3)**.

$$-4x + y = 7 \qquad \textbf{(2)}$$
$$y = 7 + 4x \qquad \textbf{(3)}$$

Paso 2

A continuación, se sustituye el valor de y que se despejó en la ecuación **(3)**, por la y de la ecuación **(1)**, de la cual no se ha despejado todavía ninguna variable.

A esta nueva ecuación se le llamará ecuación **(4)**.

$$3x - 2y = -9 \qquad \textbf{(1)}$$
$$3x - 2(7 + 4x) = -9 \qquad \textbf{(4)}$$

Paso 3

Después se despeja la incógnita, en este caso la x, de la ecuación **(4)**, para lo cual se realizan las operaciones necesarias y se calcula el valor de la incógnita:

$$3x - 2(7 + 4x) = -9 \qquad \textbf{(1)}$$

$$3x - 14 - 8x = -9 \qquad \textbf{(4)}$$

$$-5x - 14 = -9$$

$$-5x = -9 + 14$$

$$-5x = 5$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{5}{-5}$$

$$x = -1$$

Paso 4

Se sustituye en la ecuación **(3)** el valor encontrado para x, es decir: $x = -1$.

$$y = 7 + 4x \qquad \textbf{(3)}$$
$$y = 7 + 4(-1)$$
$$y = 7 - 4$$
$$y = 3$$

Por lo tanto, el valor de x y el de y que satisfacen las igualdades del sistema son:

$$x = -1$$
$$y = 3$$

Es decir, los mismos que se obtuvieron usando el método de suma y resta.

Actividad 3. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.

$$x + 3y = 10$$
$$-3x - 10y = -11$$

$$-x + 4y = 0$$
$$2x - 5y = 6$$

CONEXIONES

Revisa en la secuencia 12 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 3* en qué consiste cada grupo.

CÓDIGO COMÚN

Diversidad sexual y de género: se refiere a las diversas posibilidades que tienen las personas para expresar con libertad su atracción emocional y sexual, así como su autoidentificación de género.

PROYECTO

Entre las encuestas realizadas, en los últimos años se han agregado diversos temas antes no abarcados. Actualmente existe la Encuesta Nacional sobre **Diversidad Sexual y de Género** (ENDISEG), que levanta el INEGI como parte de sus estadísticas incluyentes.

En la encuesta realizada en el año 2021 se registraron para responder 14 364 personas mayores de 15 años.

El total de personas que respondieron esta encuesta se pueden dividir en dos grupos: las personas que indicaron pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+ y las que indicaron no pertenecer a la misma. Es decir, cuántas personas cisgénero y cuántas personas transgénero respondieron la encuesta.

Dado que se cuenta con dos incógnitas, es posible plantear un sistema de ecuaciones. La primera ecuación sería la siguiente:

$$x + y = 14\,364$$

Donde x indica el número de personas que expresaron pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+, mientras que y indica aquellas que no. Además, se sabe que la siguiente ecuación se cumple con los mismos valores para ambas variables:

$$2x - 2y = -488$$

Valor de x = ____________________

Valor de y = ____________________

TIC

Visita este enlace para que conozcas los resultados completos de la encuesta:
https://www.inegi.org.mx/investigacion/endiseg/2022/

a) En el siguiente espacio resuelve el sistema de ecuaciones para conocer la cantidad de personas encuestadas que dijeron pertenecer a cada grupo.

b) Con base en tus resultados, responde lo siguiente:

1. ¿Cuántas personas encuestadas expresaron pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+?

2. ¿Cuántas personas encuestadas expresaron no pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+?

3. ¿Estás de acuerdo con reconocer y cuantificar estas diferencias? Explica por qué sí o por qué no.

c) Reúnete con familiares, amistades u otras personas de tu *Círculo de estudio* para reflexionar sobre este tema y los derechos de las personas a expresar sus orientaciones y preferencias de cualquier tipo, sin temor a ser discriminadas.

Tema 4. Problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Muchos problemas de la vida cotidiana se pueden solucionar mediante un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**.

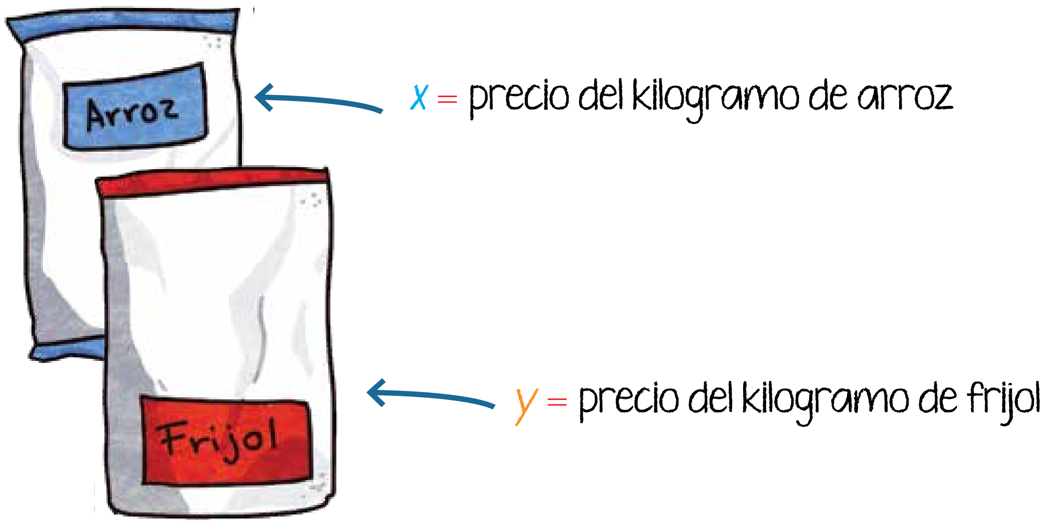
Para hacerlo, es necesario definir como incógnitas los datos que se desconocen en el problema y traducir la información en ecuaciones lineales.

Por ejemplo, resolvamos paso a paso el siguiente problema:

Si al comprar un kilogramo de arroz y un kilogramo de frijol se pagan $ 81.00, y se sabe que el kilogramo de arroz es $ 15.00 más barato que el de frijol, ¿cuánto cuesta el kilogramo de arroz y cuánto el de frijol?

Paso 1

Primero se definen las variables a utilizar y lo que significan. En este caso, se llamará x **al precio del kilogramo de arroz y** y **al precio del kilogramo de frijol**, ya que los precios es lo que se desea saber.



Paso 2

A continuación, se modelan las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Modelar una ecuación o un sistema de ecuaciones significa crear las ecuaciones que representan el problema que se quiere resolver, pasando al lenguaje algebraico la información disponible.

En este caso, se sabe que al comprar **un kilogramo de arroz** y **un kilogramo de frijol** se pagaron $ 81.00. Esto, en lenguaje algebraico, se escribe así:

$x + y = 81$ Esta es la ecuación **(1)** del sistema

Para modelar la ecuación **(2)**, se toma en cuenta que el kilogramo de arroz es 15 pesos más barato que el de frijol, lo cual significa que el precio del kilogramo de arroz equivale al precio del kilogramo de frijol menos $15. Esto, en el lenguaje algebraico, se escribe así:

$x = y - 15$ **(2)** Esta es la ecuación **(2)** del sistema

De esta forma, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que modela el problema es:

$$\begin{cases} x + y = 81 & \textbf{(1)} \\ x = y - 15 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Paso 3

Se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas empleando cualquiera de los métodos conocidos para hacerlo. En este caso se usará el **método de sustitución**, aprovechando que la ecuación **(2)** ya tiene despejada la variable x. De esta forma:

$$x + y = 81 \qquad (1)$$
$$x = y - 15 \qquad (2)$$

Si sustituimos la ecuación **(2)** en la ecuación **(1)** se tiene que:

$$x + y = 81 \qquad (1)$$
$$(y - 15) + y = 81 \qquad (3)$$

Y se resuelve la ecuación **(3)**:

$$(y - 15) + y = 81$$
$$y - 15 + y = 81$$
$$2y - 15 = 81$$
$$2y = 81 + 15$$
$$2y = 96$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{96}{2}$$
$$y = 48$$

Por lo tanto $y = 48$, lo que significa que el kilogramo de frijol cuesta $ 48.00.

Para saber cuánto cuesta el kilogramo de arroz, sustituimos el valor que ya conocemos ($y = 48$) en la ecuación **(2)**:

$$x = y - 15 \qquad (2)$$
$$x = 48 - 15$$
$$x = 33$$

Es decir, el kilogramo de arroz cuesta $33.

Para comprobar si los resultados son correctos, se sustituye el valor de x y de y en las ecuaciones originales: **(1)** y **(2)**.

$$x = 33$$
$$y = 48$$

$$x + y = 81 \quad \textbf{(1)}$$
$$33 + 48 = 81$$
$$81 = 81$$

$$x = y - 15 \quad \textbf{(2)}$$
$$33 = 48 - 15$$
$$33 = 33$$

Como los resultados **satisfacen las igualdades en ambas ecuaciones lineales**, son correctos y resuelven el sistema de ecuaciones.

Actividad 4. **Lee el problema siguiente y haz lo que se indica.**

Pablo fue a comprar utensilios de limpieza. Compró 3 escobas y 2 recogedores, pagando por todo $ 270.00. Seis meses después compró 4 escobas y 1 recogedor, pagando $ 285.00 en total.

Si los precios no tuvieron modificaciones entre las dos compras, ¿cuánto le costó cada escoba y cuánto cada recogedor?

1. Marca con una paloma ✓ el sistema de ecuaciones que modela el problema. Considera que la e denota las escobas y la r los recogedores.

$3e + 2r = 270$
$e + 4r = 285$

$3e + 2r = 270$
$4e + r = 285$

$3 + e + 2r = 270$
$4 + e + r = 285$

2. ¿Por qué seleccionaste ese sistema de ecuaciones?

____

____

3. Resuelve el sistema de ecuaciones que seleccionaste por el método que prefieras.

$e =$ ☐ $r =$ ☐

En esta secuencia aprendiste a resolver las ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante dos métodos: el de suma y resta y el de sustitución.

Actividad de cierre. Sigue las instrucciones.

a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con el método de tu preferencia.

$$6m - 4n = 218$$
$$28m + 2n = 14$$

b) Comprueba tus resultados.

c) Responde las preguntas.

1. ¿Cuál método se te facilitó más y por qué?

2. ¿Conoces otro método para resolver sistemas de ecuaciones? De ser así, explícalo.

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Resolví un sistema de ecuaciones sobre demografía con el método de sumas y restas o sustitución.	
Interpreté, reflexioné y socialicé información sobre las personas que declaran pertenecer a la comunidad LGBTTTIQ+.	

Secuencia

3

Método gráfico para resolución de ecuaciones

En esta secuencia conocerás y pondrás en práctica un tercer método de resolución de sistemas de ecuaciones, así que aprenderás a hacer tablas y a graficar para resolver sistemas de ecuaciones. A diferencia de los otros métodos de resolución, este es gráfico y se relaciona con los temas que ya viste sobre funciones, donde hiciste tablas de datos y las representaste gráficamente.

PROYECTO

Adicionalmente, trabajarás en el proyecto *Visibilizo el derecho a la diversidad sexual en mi comunidad*. En esta secuencia desarrollarás estas actividades:

- Cálculo del porcentaje de cada grupo de personas que respondieron la ENDISEG 2021.
- Elaboración de una gráfica circular para presentar datos de la ENDISEG 2021.

El ícono **PROYECTO** se emplea para distinguir las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. **Te invitamos a recuperar tus aprendizajes previos sobre suma de monomios y polinomios.**

a) Selecciona las palabras que completan de forma correcta el texto y escríbelas en la línea que corresponda.

dos	sí es una recta	no es una recta
cualquier función	coordenadas	recta

En el plano cartesiano es posible ubicar puntos mediante sus ____________________________. También se puede graficar con ayuda de tablas.

La gráfica de una ________________ proviene de una función cuyo máximo exponente para cualquiera de las variables es igual a uno. Así, por ejemplo, la ecuación $y = 3x^2 + 1$ __________________ mientras que la ecuación $y = 7x - 3$ ____________________.

Es posible graficar una recta si se conocen por lo menos ________________________ de sus puntos.

Tema 1. Método de graficación para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Los **sistemas de ecuaciones** que has resuelto en la secuencia anterior están formados por dos ecuaciones que tienen en común el valor de x y el valor de y. Por ejemplo, para resolver el problema sobre el precio del kilogramo de arroz y el de frijol se planteó un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: x para el precio del arroz y y para el precio del frijol.

Cada ecuación del sistema contiene información diferente, pero complementaria.

Recuerda que las ecuaciones lineales se llaman así, precisamente, porque si se grafican en el plano cartesiano se obtiene como resultado una línea recta.

En un **sistema de ecuaciones** se tienen **dos rectas que no son paralelas**, es decir, que en algún punto se cruzan entre sí. Las coordenadas donde se cruzan son los valores de x y de y que satisfacen la igualdad.

Observa cómo se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Ecuación (1) — Ecuación (2)

$$2x + y = 3 \qquad\qquad x + y = 1$$

Paso 1
Se despeja la y de las ecuaciones del sistema. A las ecuaciones resultantes se les conoce como **ecuaciones de las rectas**.

Ecuación (1):

$$2x + y = 3$$
$$2x - 2x + y = 3 - 2x$$
$$(3) \quad y = 3 - 2x$$

Ecuación (2):

$$x + y = 1$$
$$x - x + y = 1 - x$$
$$y = 1 - x \quad (4)$$

Paso 2
Se asignan valores arbitrarios a x en cada ecuación y se calcula el valor de y.

Con estos valores se conocen las coordenadas de un punto de cada ecuación.

Ecuación (1):

Si $x = -5$
$$y = 3 - 2x$$
$$y = 3 - 2(-5)$$
$$y = 3 + 10$$
$$y = 13$$
$(-5, 13)$

Ecuación (2):

Si $x = -5$
$$y = 1 - x$$
$$y = 1 - (-5)$$
$$y = 1 + 5$$
$$y = 6$$
$(-5, 6)$

Paso 3
Se asignan otros valores arbitrarios a x en cada ecuación y se calcula el valor de y.

Con estos valores se conocen las coordenadas de otro punto de cada ecuación.

Ecuación (1):

Si $x = 7$
$$y = 3 - 2x$$
$$y = 3 - 2(7)$$
$$y = 3 - 14$$
$$y = -11$$
$(7, -11)$

Ecuación (2):

Si $x = 7$
$$y = 1 - x$$
$$y = 1 - (7)$$
$$y = 1 - 7$$
$$y = -6$$
$(7, -6)$

Dado que cada ecuación representa una línea recta, basta con asignarle dos puntos arbitrarios a cada ecuación y unirlos con una línea para dibujarlas, como ya has visto en los temas del plano cartesiano.

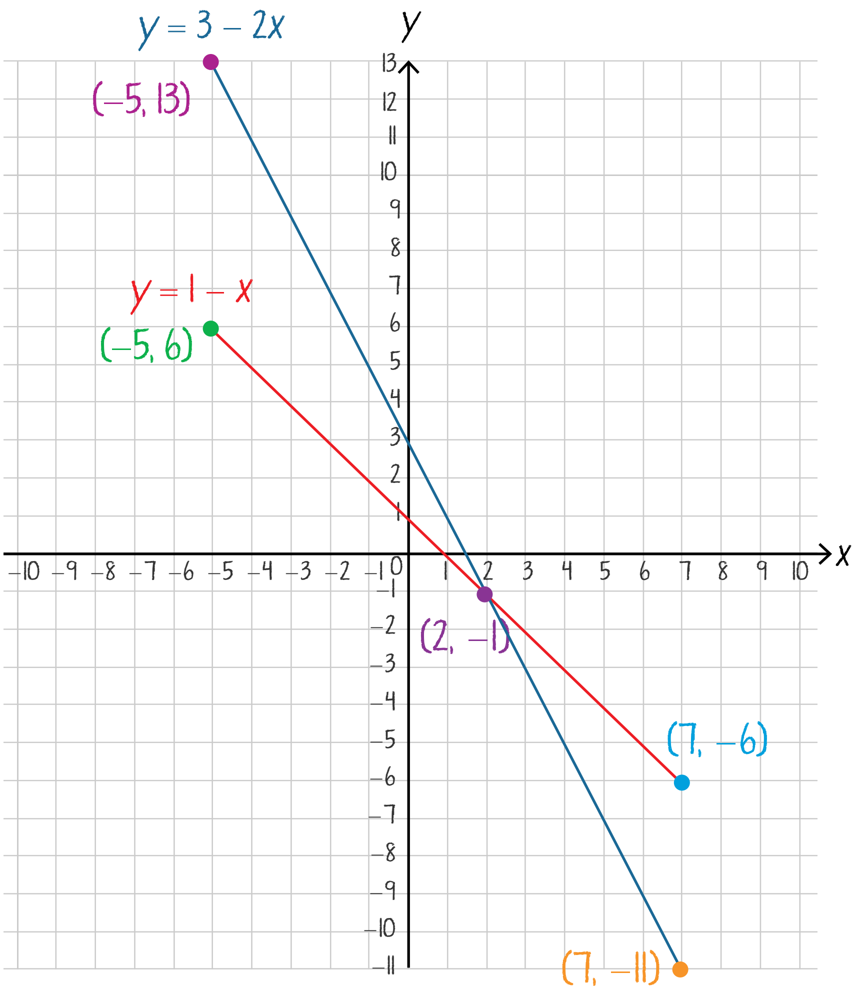
Estos valores se te proporcionan por lo regular cuando resuelves un sistema de ecuaciones hipotético, pero si tú planteas uno para resolver algún problema en la vida real, puedes asignar a X dos valores cercanos al origen, como: $-2, -1, 0, 1, 2$.

TIC

En línea puedes encontrar plataformas para hacer los gráficos. Por ejemplo, *Geogebra*, sitio que es gratuito. Este es el enlace para la parte de Geometría: https://www.geogebra.org/geometry

Paso 4

Se localizan las coordenadas del punto donde las dos rectas se cruzan.



En este caso, como puede verse en la gráfica anterior, las rectas se cruzan en el punto cuyas coordenadas son $(2, -1)$, así que los valores de x y de y que dan solución al sistema de ecuaciones son:

$$x = 2 \qquad y = -1$$

Para comprobar los resultados, se sustituyen los valores de x y de y en las dos ecuaciones originales y se realizan las operaciones.

Ecuación **(1)**

$$\boxed{2x + y = 3}$$

$$2(2) + (-1) = 3$$
$$4 - 1 = 3$$
$$3 = 3$$

Ecuación **(2)**

$$\boxed{x + y = 1}$$

$$2 + (-1) = 1$$
$$2 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Como los valores de x y de y satisfacen la igualdad en ambas ecuaciones lineales, son correctos y resuelven el sistema.

Actividad 1. Resuelve los sistemas de dos ecuaciones con el método gráfico. Despeja la y de cada ecuación, después sustituye los valores de x que se indican en cada inciso para obtener las coordenadas de las dos rectas.

a) $x = 5$ $\quad\quad$ $4x - 4y = 12$

$x = 7$ $\quad\quad$ $3x + 5y = 25$

b) $x = 3$ $\qquad$ $x - y = 1$

$x = 5$ $\qquad$ $x + y = 7$

c) $x = -2$ $\quad$ $5x - y = -1$

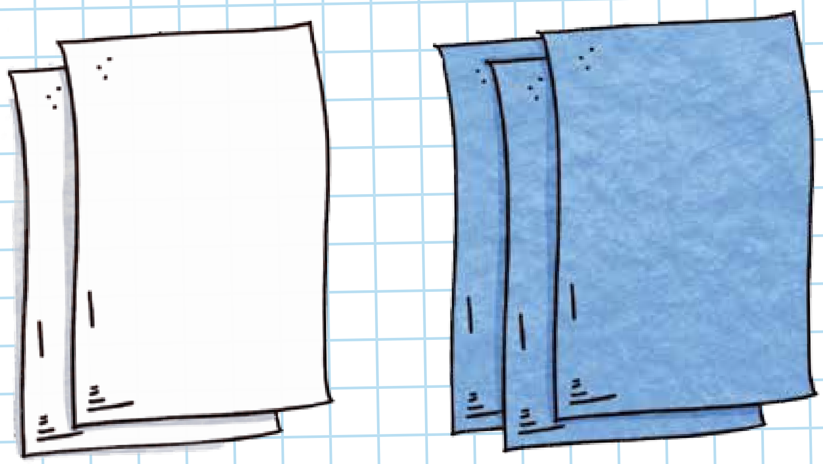
$x = 2$ $\quad$ $-x + 2y = 0$

Tema 2. Resolución de problemas con el método de graficación

Hay problemas de la vida cotidiana que pueden resolverse mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para hacerlo, es necesario definir como incógnitas los datos que se desean encontrar dentro del problema y aprender a traducir la información a ecuaciones lineales.

A continuación, se resolverá un problema mediante el método de graficación, encontrando los valores de x y de y.

Fabiola compró 2 hojas blancas de papel y 3 hojas de color azul en una papelería, pagando $ 13.00 por todo. Al día siguiente, en la escuela, uno de sus compañeros del salón le dijo que 4 hojas blancas cuestan lo mismo que 1 hoja azul más $5.00. ¿Cuánto cuesta cada hoja blanca y cada hoja azul?



Primero se definen las incógnitas a utilizar y lo que cada una significa. En este caso, se le llamará x **al precio de una hoja blanca y** y **al precio de una hoja azul,** ya que es lo que se desconoce en el problema.

x = precio de una hoja blanca
y = precio de una hoja azul

Para modelar las dos **ecuaciones lineales con dos incógnitas** que representan el problema, se traduce al lenguaje algebraico la información disponible.

En este caso, se sabe que 2 hojas blancas y 3 hojas azules cuestan \$13.00. Esto, en lenguaje algebraico, se escribe así:

$$2x + 3y = 13$$

También se sabe que 4 hojas blancas cuestan lo mismo que una hoja azul más \$5.00. Esto se escribe así en lenguaje algebraico:

$$4x = y + 5$$

De esta forma, ya se tienen las dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x = y + 5 \end{cases}$$

Usando el **método de graficación,** primero se despeja la y de cada ecuación del sistema para generar las **ecuaciones de las rectas** y después se sustituye la x en estas últimas.

$$2x + 3y = 13 \quad \textbf{(1)}$$
$$2x - 2x + 3y = 13 - 2x$$
$$3y = 13 - 2x$$

$$4x = y + 5 \quad \textbf{(2)}$$
$$4x - 5 = y + 5 - 5$$

$$\boxed{y = \frac{13 - 2x}{3}} \quad \textbf{(3)}$$

$$\boxed{4x - 5 = y} \quad \textbf{(4)}$$

Así, para la ecuación **(3)**:

Cuando $\boxed{x = 4}$

$$y = \frac{13 - 2x}{3}$$
$$y = \frac{13 - 2(4)}{3}$$
$$y = \frac{13 - 8}{3}$$
$$y = \frac{5}{3} = 1.6$$
$$y = 1.6$$

$\boxed{x = -1}$

$$y = \frac{13 - 2x}{3}$$
$$y = \frac{13 - 2(-1)}{3}$$
$$y = \frac{13 + 2}{3}$$
$$y = \frac{15}{3} = 5$$
$$y = 5$$

Así, para la ecuación **(4)**:

Cuando $x = 4$

$y = 4x - 5$

$y = 4(4) - 5$

$y = 16 - 5$

$y = 11$

$x = -1$

$y = 4x - 5$

$y = 4(-1) - 5$

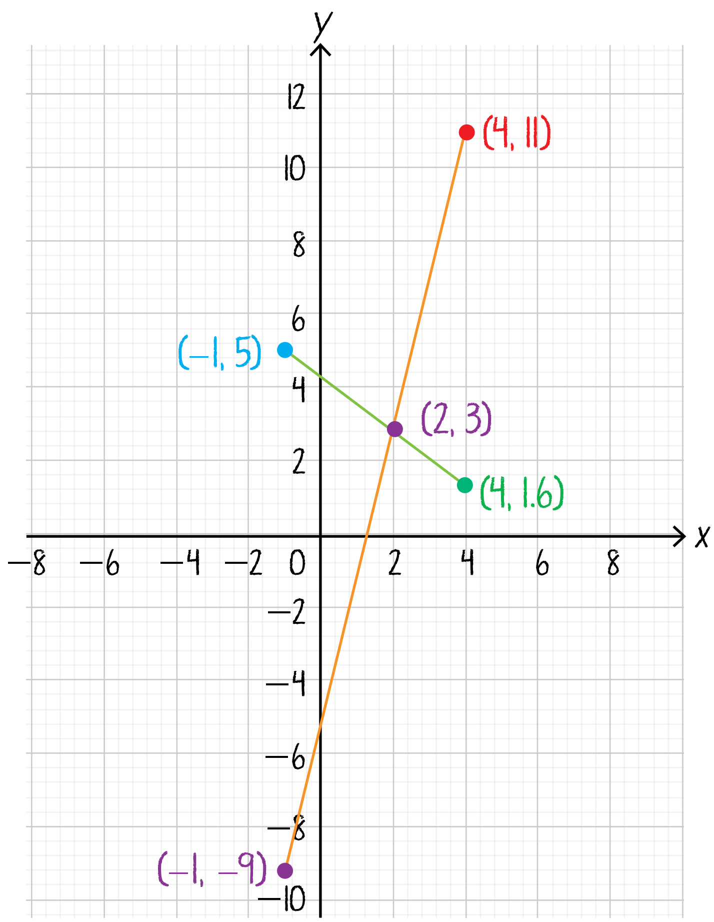
$y = -4 - 5$

$y = -9$

La propiedad simétrica de la igualdad permite intercambiar las dos expresiones de la ecuación. Es como si en la balanza cambiaras los dos pesos de lado.

En seguida se grafican las rectas **en un mismo plano cartesiano.**

Como los valores de x y de la y satisfacen las igualdades en ambas ecuaciones lineales, son correctos y resuelven el sistema.



TIC

Revisa otro problema y la forma de resolverlo en el portal Académico del CCH de la UNAM, en el siguiente enlace: http://bit.ly/3XKg8rk

Ecuación 1: coordenadas $(4, 1.6)$ y $(-1, 5)$

Ecuación 2: coordenadas $(4, 11)$ y $(-1, -9)$

El punto donde ambas rectas se cruzan tiene coordenadas $(2, 3)$, es decir, $x = 2$, $y = 3$, lo que significa que cada hoja blanca cuesta \$ 2.00 y cada hoja azul, \$ 3.00.

Para comprobar los resultados, se sustituyen $x = 2$ y $y = 3$ en las dos ecuaciones originales:

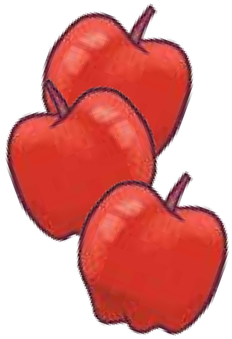
(1)	(2)
$2x + 3y = 13$	$4x = y + 5$
$2(2) + 3(3) = 13$	$4(2) = (3) + 5$
$4 + 9 = 13$	$8 = 3 + 5$
$13 = 13$	$8 = 8$

Actividad 2. Marca con una paloma ✓ la opción correcta en cada uno de los casos.

a) Para este sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las ecuaciones de las rectas?

$$4x + 3y = 250$$
$$8x + y = 250$$

- $y = \frac{(250 - 4x)}{3}$, $y = 250 - 8x$
- $y = 4x - 250$, $y = 8x + 250$
- $y = 250 - 4x$, $y = 250 - 8x$



b) Ixchel quiere saber cuántas calorías tiene cada una de las frutas que su médico le recomendó comer como parte de su dieta. Según el médico, 2 granadas y 3 manzanas tienen 250 calorías, y 4 granadas y 1 manzana también tienen 250 calorías. ¿Cuántas calorías tiene cada granada y cuántas cada manzana? Selecciona el sistema que modela el problema.

- $4x + 3y = 250$
  $1.5x - 2 = 250$
- $2x + 3y = 250$
  $4x + y = 250$
- $4x + 1.5y = 250$
  $4x + y = 250$

c) Para la recta $y = \frac{250 - 4x}{3}$, ¿cuáles son dos de sus puntos?

- Cuando $x = 10$, $y = 82$
  Cuando $x = 25$, $y = 80$
- Cuando $x = 10$, $y = 75$
  Cuando $x = 25$, $y = 70$
- Cuando $x = 10$, $y = 70$
  Cuando $x = 25$, $y = 50$

d) Para la recta $y = 250 - 8x$, ¿cuáles son dos de sus puntos?

- Cuando $x = 0$, $y = 200$
  Cuando $x = 25$, $y = 100$
- Cuando $x = 0$, $y = 250$
  Cuando $x = 25$, $y = 50$
- Cuando $x = 0$, $y = 210$
  Cuando $x = 25$, $y = 55$

PROYECTO

Para visibilizar mejor las proporciones de personas pertenecientes a la comunidad LGBTTTIQ+ que respondieron la encuesta, elabora una gráfica circular o de pastel con los valores de x y de y. Para ello:

a) Calcula el porcentaje de cada grupo y completa la tabla.

Grupo	Cantidad	%
Personas que expresaron pertenecer a la población LGBTTTIQ+	7060	
Personas que expresaron no pertenecer a la población LGBTTTIQ+	7304	
Total	14364	100

CONEXIONES

Revisa en la secuencia 9 del módulo *Pensamiento matemático 3* lo que se menciona sobre la gráfica circular.

b) Elabora la gráfica circular para mostrar los porcentajes, ya sea con un programa de computación o a mano.

Recuerda que esta gráfica representa los resultados de una encuesta de internet para la que se inscribieron personas interesadas en las temáticas de orientación sexual e identidad de género y por ello **sus resultados solo representan un segmento de la población mexicana**; es decir, a quienes la respondieron.

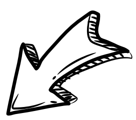
CÓDIGO COMÚN
Tríptico: hoja que se dobla en tres partes y se utiliza para dar a conocer información.

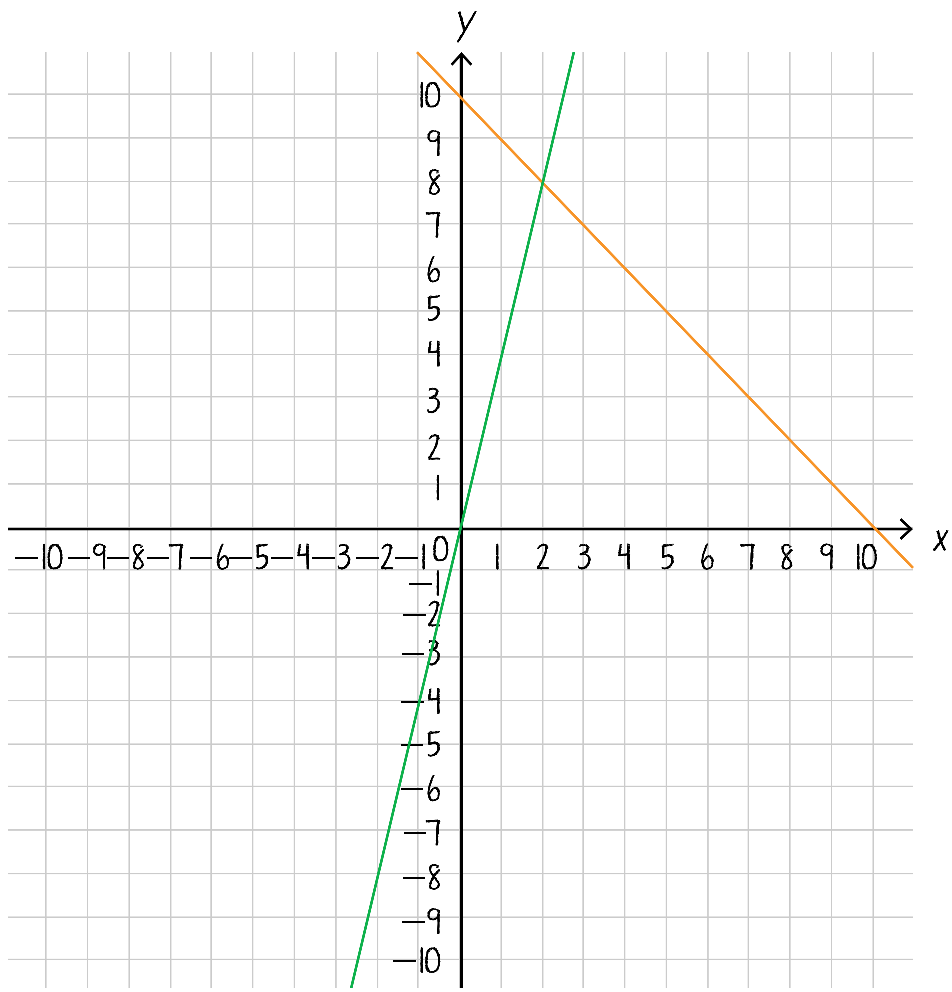
c) Haz una copia de la gráfica en limpio para que la utilices en un **tríptico** que elaborarás en la secuencia siguiente.

Título del gráfico:

En esta secuencia aprendiste un tercer método para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, también pudiste observar que este tipo de ecuaciones se representan con una línea recta.

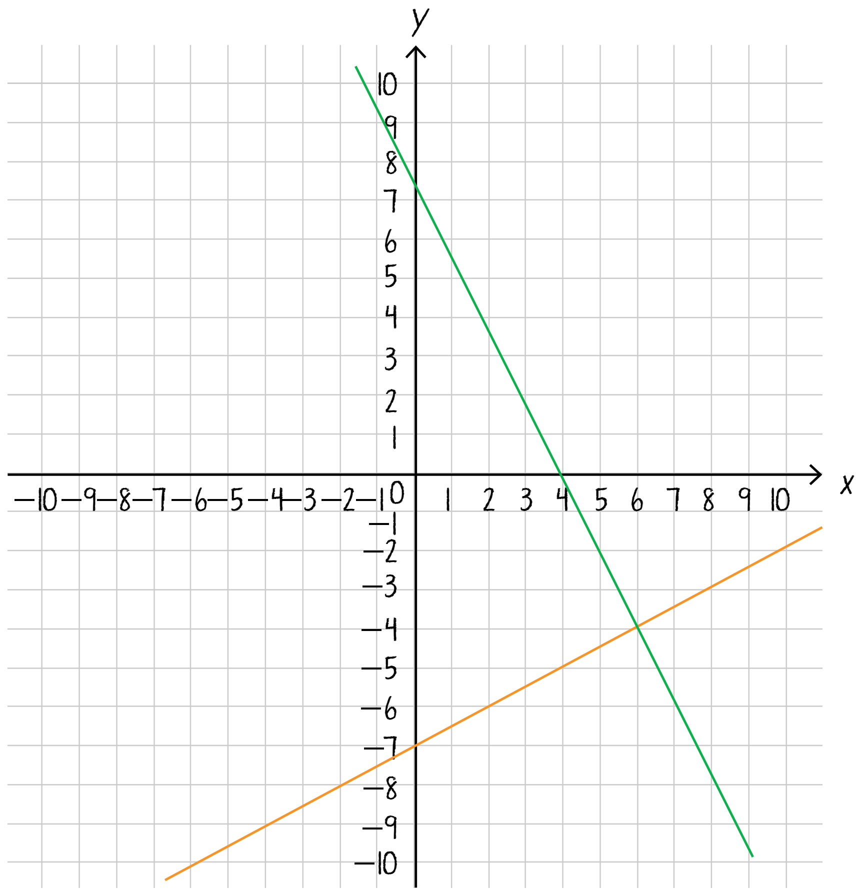
Actividad de cierre. Con base en las gráficas, escribe los valores de x y de y que satisfacen las ecuaciones de las rectas.





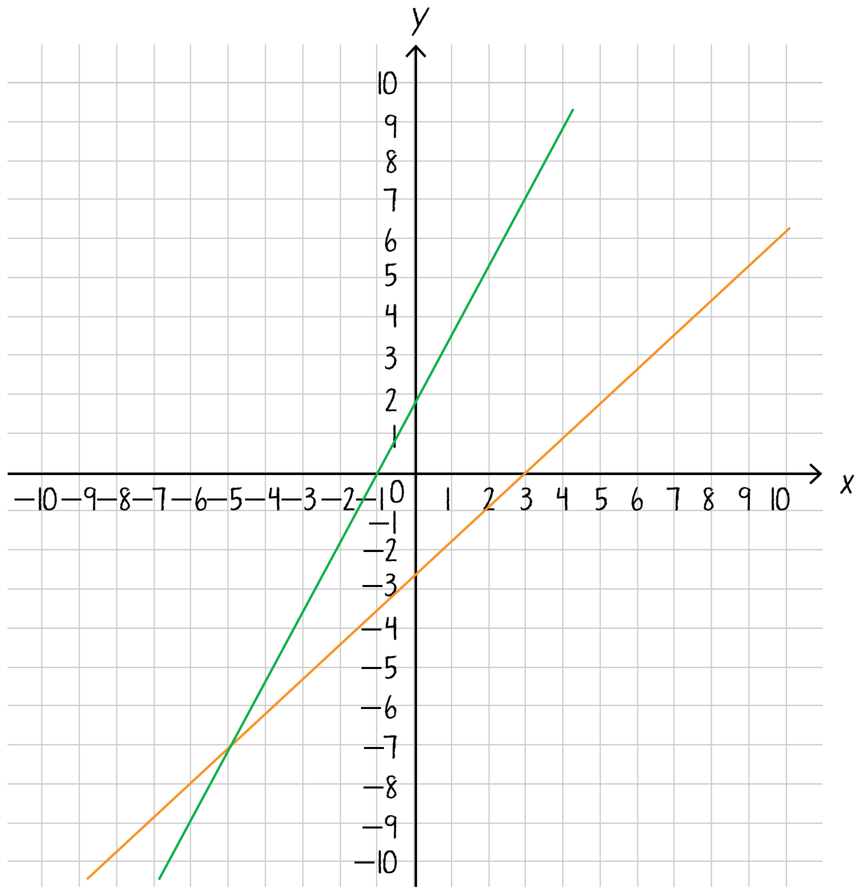
$x =$ ____________

$y =$ ____________


y
x
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8 −9 −10

x = ____________

y = ____________


y
x
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8 −9 −10

x = ____________

y = ____________

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Calculé el porcentaje de cada grupo de personas que respondieron la ENDISEG 2021.	
Elaboré una gráfica circular para presentar datos de la ENDISEG 2021.	

Secuencia

4

Ecuaciones cuadráticas

En esta última secuencia de la unidad 1, conocerás las ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas. Identificarás su fórmula general, practicarás la forma de solucionarlas y resolverás problemas con ellas.

PROYECTO

También finalizarás el proyecto *Visibilizo el derecho a la diversidad sexual en mi comunidad*. Estas son las actividades para promover el derecho a la diversidad e igualdad.

- Revisión e interpretación de una gráfica sobre las características sociodemográficas de la comunidad LGBTTTIQ+.
- Elaboración de un tríptico con información para visibilizar a la comunidad LGBTTTIQ+.
- Compromiso para promover el respeto a la diversidad y la igualdad de derechos.

Como en secuencias anteriores, el ícono **PROYECTO** distingue las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Para comenzar con la secuencia, retoma tus aprendizajes previos.

a) Elige la palabra o frase que completa de forma correcta el texto.

igual · algebraica · variables · resolver

ecuación · despeja · exponente

del otro lado · lineal con una incógnita

Una ecuación es una expresión ______________________que se caracteriza porque tiene un signo ____________________________ que indica equivalencia entre las dos partes de la ecuación. Cualquier expresión algebraica que no tenga un signo igual no es una _______________________.

Cuando se ________________ una variable, se la deja sola en uno de los lados de la ecuación, por lo general del lado izquierdo, y todo lo demás se deja _________________. De esta forma es posible _________________ de forma directa una ecuación _______________.

Las ecuaciones se clasifican tomando en cuenta cuál es el ______________________ más grande que tiene cualquiera de sus __________________________.

b) Responde las preguntas.

1. ¿Cuántas veces se multiplica X en X^2?

____

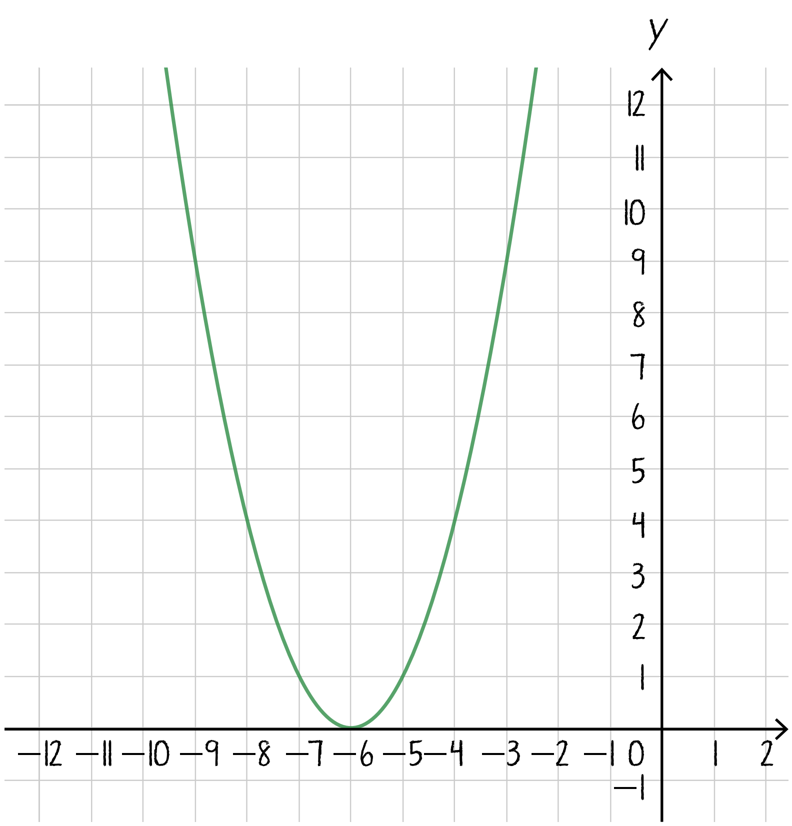
2. ¿Cómo podrías representar gráficamente una ecuación que tenga una sola variable, pero elevada al cuadrado, como X^2?

____

____

3. ¿Cuál es el nombre de la siguiente gráfica?

____



DESARROLLO

Tema 1. La ecuación cuadrática

Recuerda que una ecuación es una expresión algebraica que se caracteriza porque tiene un signo igual (=). Representa una igualdad entre dos cantidades o expresiones, que pueden ser numéricas o algebraicas, es decir, que incluyen letras, como x, y o z, por ejemplo.

Cualquier expresión algebraica que no tenga un signo igual, **no es una ecuación**.

Las ecuaciones se clasifican tomando en cuenta el exponente más grande que tienen sus variables. Cuando el exponente más grande de cualquiera de las literales es el uno, se dice que la ecuación es **lineal** o de **primer grado**.

CONEXIONES

Revisa la secuencia 1 de esta unidad y módulo para recordar la forma como se representan las ecuaciones lineales en el plano cartesiano.

Ejemplo:

$$x + y = 4$$

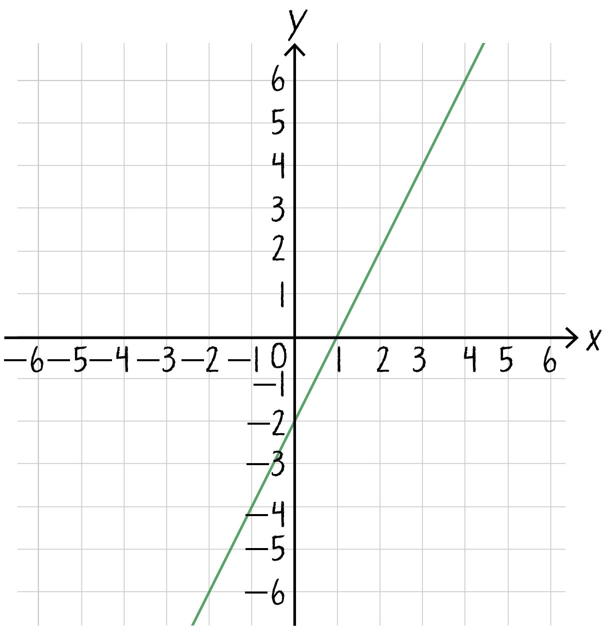
Como ya has visto en secuencias pasadas, cuando se grafica una ecuación lineal, el dibujo que resulta es una línea recta.

Cuando el exponente más grande de cualquiera de las literales de una igualdad es el 2, se dice que la ecuación es **cuadrática** o de **segundo grado**.

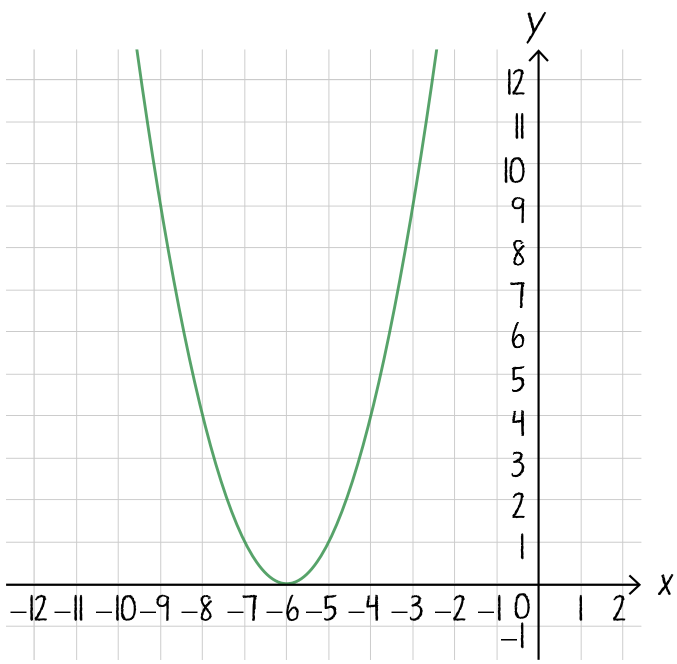
Ejemplo:

$$x^2 + 2x = 5$$

Cuando se grafica una ecuación cuadrática, el dibujo que resulta **es una curva**.



Gráfica de ecuación lineal



Gráfica de ecuación cuadrática

Los siguientes también son ejemplos de **ecuaciones cuadráticas.** Fíjate cómo, en cada una de ellas, el exponente más grande de cualquiera de sus literales es el número 2.

$3x^2 = 27$

$x - 2x^2 + 10 = 19$

$x^2 + 2 = 3x$

$16 - x^2 = 0$

$9x + x^2 + 18 = 20$

Recuerda que simplificar significa hacer todas las operaciones posibles, hasta que ya no puedan hacerse más.

Hay ocasiones en que es necesario **simplificar** una ecuación para definir si es o no cuadrática. Por ejemplo, esta ecuación aparentemente no lo es:

$$(x^6 \div x^4) + 5 = 0$$

Porque su exponente más grande es el número 6. Pero si te fijas bien, x^6 se puede dividir entre x^4, lo que es igual a x^2 (recuerda que en la división los exponentes se restan):

$$(x^6 \div x^4) + 5 = 0$$

$$\boxed{x^6 \div x^4 = x^2}$$

$$x^2 + 5 = 0$$

Así, esta también es una ecuación cuadrática o de segundo grado.

De manera similar, esta ecuación es lineal en apariencia:

$$6x - x(x + 1) = 12$$

Pero al multiplicar la x por el binomio $(x + 1)$:

$$6x - x(x + 1) = 12$$

$$6x - x^2 - x = 12$$

$$-x^2 + 6x - x = 12$$

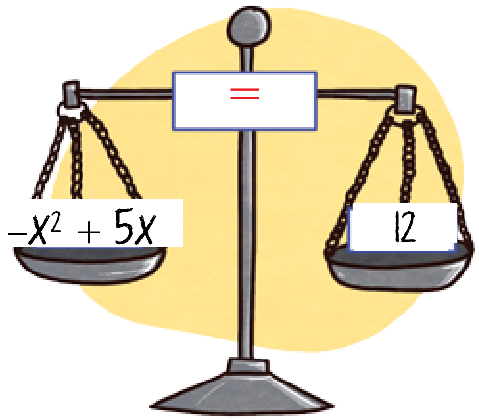
$$-x^2 + 5x = 12$$

Tras simplificar la ecuación, puedes ver que **sí es cuadrática.**

Para identificar una ecuación cuadrática y cada uno de sus componentes, también es de gran ayuda igualarla a cero; esto quiere decir que todos los elementos de la ecuación se pasan al lado izquierdo de la igualdad y se deja un cero del lado derecho.

Por ejemplo, con esta misma ecuación:

$$-x^2 + 5x = 12$$



Para igualarla a 0 puedes verla como una balanza, donde lo que está de un lado del signo igual ($=$) pesa lo mismo que lo que está del otro lado. Entonces, se restan 12 en ambos lados de la ecuación:

$$-x^2 + 5x - 12 = 12 - 12$$

$$-x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$-x^2 + 5x - 12 = 0$$

Un último ejemplo con una raíz:

$$9y - \sqrt{y^2} = 12$$

La **raíz es la operación contraria a la potencia**; cuando ambas tienen el mismo valor, pueden eliminarse. Así, en este término, raíz y exponente del segundo término se cancelan:

CONEXIONES

Revisa el tema de los exponentes y las raíces en la secuencia 4 de la unidad 1 del módulo *Pensamiento matemático 3.*

$$9y - \cancel{\sqrt{y^{2}}} = 12$$

$9y - y = 12$ al simplificar.

Y queda:

$$\boxed{8y = 12}$$

Por lo tanto, **esta ecuación no es cuadrática**, ya que al simplificarla se eliminó el exponente 2.

Recuerda, cuando se saca raíz de una potencia, se divide el exponente entre el índice de la raíz.

$$\sqrt{x^6} = x^{6 \div 2 = 3}$$

$$\sqrt{x^6} = x^3$$

Actividad 1. Marca con una paloma ✓ las ecuaciones que **no** son cuadráticas.

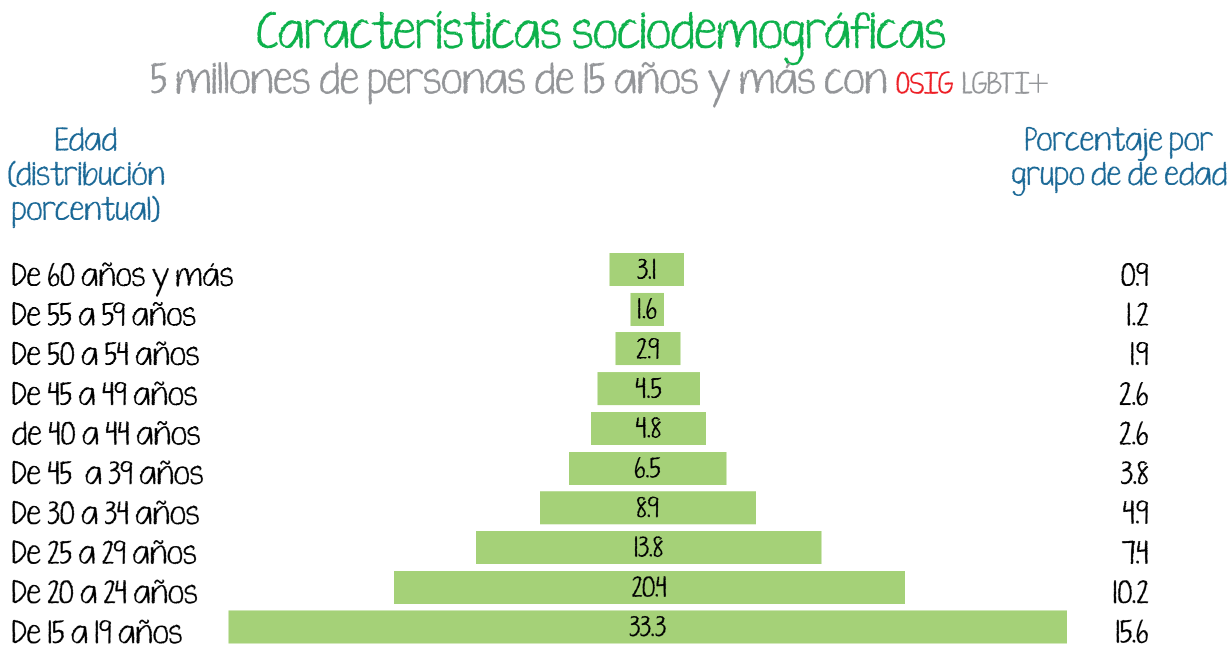
$5x^2 = 4x^8$ ☐	$x^2 - 3x = 6 - x^2$ ☐
$x^2 + 5x = 25^3$ ☐	$9x - \sqrt{2x} = 9$ ☐
$3x^2 - x^2 + 8x^2 = 5$ ☐	$x^3 + 2x - 5 = 7$ ☐
$5x^2 - 4x^8 = 1$ ☐	$x(x + 2) = 27$ ☐

PROYECTO

La Encuesta Nacional sobre Diversidad Sexual y de Género (ENDISEG 2021), que has consultado en esta unidad, presenta información en gráficas como la que se muestra en la siguiente página.

Observa que la gráfica es piramidal y su forma no aumenta de manera constante, como los datos para trazar ecuaciones lineales. Al analizarla, se aprecia que entre menor es la edad de la persona que respondió la encuesta, aumenta el número de personas que se consideran como parte de la comunidad LGBTTTIQ+.

a) Analiza la gráfica y responde las preguntas.



Fuente: INEGI, Encuesta Nacional sobre Diversidad Sexual y de Género Web (ENDISEG Web),2022, Disponible en: https://www.inegi.org.mx/investigacion/endiseg/2022/ (Consulta: 23 deoctubre de 2022).

1. ¿Cuántas personas con orientación sexual e identidad de género LGBTI+ o LGBTTTIQ+ participaron en la encuesta?

____

2. De esas personas, ¿cuál grupo de edad tuvo menor porcentaje de participación y de cuánto fue dicho porcentaje?

____

3. ¿Cuál grupo tuvo mayor participación y de cuánto fue el porcentaje?

____

CÓDIGO COMÚN

OSIG: son las siglas de la expresión Orientación Sexual e Identidad de Género.

Tema 2. Tres formas en que se representa una ecuación cuadrática

Todas las ecuaciones cuadráticas se igualan a cero para ser identificadas. Pueden presentarse en tres formas distintas, y las tres indican que se trata de una ecuación cuadrática.

1. **Forma completa de una ecuación cuadrática**. La forma completa de esta ecuación tiene tres monomios:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La a es el coeficiente de la x; la b es el coeficiente de la x lineal (la variable elevada al exponente 1) y la c es el llamado término independiente (porque no acompaña a ninguna variable).

Pon mucha atención al hecho de que la ecuación está igualada a 0. Aquí tienes un ejemplo de una ecuación cuadrática en su forma completa:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Recuerda que cuando el coeficiente es el número 1, no se escribe. Observa que en esta ecuación todos los coeficientes son el número 1, solo que en c es negativo.

$$\underbrace{(1)}_{\boxed{a=1}}x^2 + \underbrace{(1)}_{\boxed{b=1}}x - \underbrace{1}_{\boxed{c=-1}} = 0$$

Para determinar los valores de a, b y c, se toma en cuenta el **signo que acompaña a cada coeficiente** y al término independiente. En este caso, el valor de c es negativo.

2. **Forma de la ecuación cuadrática sin el término independiente.** La **segunda forma** de una ecuación cuadrática es cuando **no tiene el término independiente**:

$$ax^2 + bx = 0$$

Observa que también está igualada a 0. La siguiente es una ecuación cuadrática de esta forma:

$$-3x^2 - 6x = 0$$

En este caso:

$$a = -3 \qquad b = -6 \qquad c = 0$$

La c es igual a cero porque esta ecuación puede escribirse de esta otra forma:

$$-3x^2 - 6x - 0 = 0$$

Pero como no tiene ningún sentido sumar un cero, cuando no aparece el término independiente en una ecuación cuadrática se entiende que $c = 0$.

3. **Forma de ecuación cuadrática sin término lineal.** La tercera forma en que se puede presentar una ecuación cuadrática es cuando **no tiene la variable lineal** (la que está elevada al exponente 1):

$$ax^2 + c = 0$$

También tiene que igualarse a cero en caso de que no lo esté. Un ejemplo de este tipo de ecuación cuadrática es el siguiente:

$$10x^2 - 8 = 0$$

En este caso, los valores de a, b y c son:

$$a = 10 \qquad b = 0 \qquad c = -8$$

Para entender por qué $b = 0$, considera que esta ecuación también podría escribirse de esta otra manera:

$$10x^2 + 0x - 8 = 0$$

Pero como cualquier número o variable multiplicado por cero es igual a cero, tampoco tiene ningún caso escribir el término de la x lineal con su coeficiente igual a cero.

Actividad 2. Escribe después de cada ecuación cuál término le falta para ser una ecuación cuadrática completa.

$x^2 + 3x = 0$ Término faltante: __________

$23x^2 + 12 = 0$ Término faltante: __________

$38x + 7 = 0$ Término faltante: __________

$x + 7 = 0$ Término faltante: __________

b) Escribe en los recuadros la inicial que corresponda con el tipo de ecuación cuadrática.

A	B	C
$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$

- $9x^2 = \frac{-100}{7}$ ☐
- $8x^2 + 2x - 7 = 0$ ☐
- $x^2 - x = 0$ ☐
- $-4x^2 + 3x + 5 = 0$ ☐
- $20x^2 - 20 = 0$ ☐
- $8x^2 + \sqrt{2x} = 0$ ☐
- $-7x^2 - 6x = 0$ ☐
- $x^2 - 100 = 0$ ☐

Tema 3. La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Ahora que ya sabes identificar las ecuaciones cuadráticas y de qué formas pueden presentarse, es momento de que aprendas a resolverlas.

Uno de los métodos para resolver cualquier ecuación cuadrática, en cualquiera de sus formas, es con la llamada **fórmula general**, que es la siguiente:

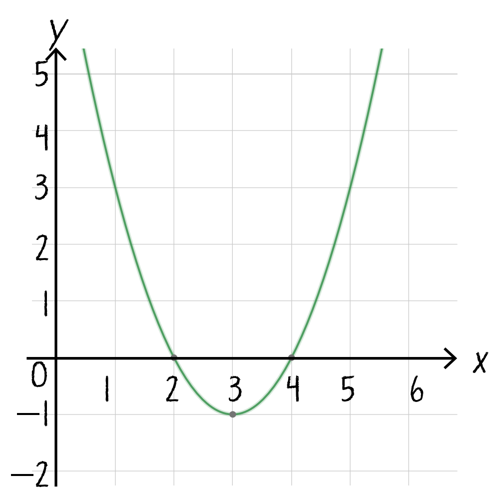
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como puedes ver, para resolver esta fórmula, basta con sustituir en ella los valores de a, b y c de cualquier ecuación cuadrática y realizar las operaciones.

Toda ecuación cuadrática tiene **dos posibles soluciones** porque, como su gráfica es una curva, atraviesa dos veces el eje de las X. Hay ecuaciones de segundo grado para las cuales una o sus dos soluciones no son aplicables en los números reales.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El que las ecuaciones cuadráticas tengan dos soluciones se nota en el signo $\pm$ de su fórmula.



Por este motivo, a la primera solución se le identifica con X y se utiliza el signo **más** ($+$) para calcularla a partir de la fórmula:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mientras que a la segunda solución se le identifica con X_2 y se utiliza el signo **menos** para calcularla a partir de la fórmula:

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La curva cruza dos veces el eje de las X porque las raíces cuadradas tienen dos soluciones, ya que la raíz cuadrada de cualquier cantidad es igual al número que multiplicado por sí mismo es igual a esa cantidad.

De esta forma, por ejemplo**, la raíz cuadrada de 81 es igual a $+9$ y, también, a -9, porque tanto 9 por 9 como -9 por -9 es igual a 81.**

Porque:

$$(9)(9) = 81$$

$$(-9)(-9) = 81$$

$$\sqrt{81} = \pm 9$$

Por este mismo motivo, la raíz cuadrada de los números negativos no existe en los números reales: para obtener el -81 se tendría que multiplicar 9 por -9, pero estos números no son iguales entre sí.

Solo en los llamados **números imaginarios** existe la raíz cuadrada de los números negativos.

Actividad 3. **Completa las oraciones con la palabra correcta entre las opciones.**

raíz	segundo	cuadrática	ecuación
tres	general	menos	dos

1. Es ____________________ la cantidad máxima de soluciones que puede llegar a tener una ecuación cuadrática.
2. La ________________ es la expresión matemática que consta de dos partes separadas por un símbolo igual.
3. La llamada fórmula __________________ permite resolver ecuaciones cuadráticas.
4. La ____________________ cuadrada es la operación contraria de elevar al cuadrado.
5. El signo ± de la fórmula general es una combinación de los signos más y __________________.
6. En las ecuaciones _________________ el exponente más grande de la variable es el dos.
7. A las ecuaciones cuadráticas también se les conoce como ecuaciones de__________________ grado.
8. Las ecuaciones cuadráticas pueden presentarse de ___________ formas diferentes.

PROYECTO

Con lo que has revisado hasta el momento acerca la comunidad LGBTTTIQ+ puedes armar un tríptico que sirva para dar a conocer información confiable entre tus amistades, tu familia y otras personas de tu *Círculo de estudio*. Recuerda que la información es la mejor arma contra la discriminación.

TIC

Si necesitas profundizar en el tema, consulta en línea la página del Consejo Nacional para Prevenir la Discriminación (CONAPRED) en el siguiente enlace: https://www.conapred.org.mx

a) Para hacer el tríptico escribe un texto de tres párrafos a partir de la información que ya tienes.

Párrafo 1

Describe a grandes rasgos lo que investigaste acerca de la comunidad LGBTTTIQ+.

Párrafo 2

Explica el resultado de la encuesta.

Párrafo 3

Escribe tus conclusiones.

b) Revisa tu información con ayuda de otras personas de tu comunidad. Haz los ajustes que consideres necesarios.

c) Crea un título para tu tríptico y escríbelo aquí.

Tema 4. Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Para resolver la ecuación cuadrática:

$$3x^2 = 6x + 9$$

Primero se iguala la ecuación a cero, lo que significa que hay que pasar el binomio $6x + 9$ al lado izquierdo de la ecuación. Para lograrlo, suma a cada lado de la igualdad el binomio $-6x - 9$.

De esta forma, se tiene que:

$$3x^2 = 6x + 9$$

$$3x^2 + (-6x - 9) = 6x + 9 + (-6x - 9)$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 6x + 9 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 + 0$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

A continuación, se identifican los valores de a, b y c. En este caso:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$a = 3$ $\qquad$ $b = -6$ $\qquad$ $c = -9$

Después, se aplica la fórmula general con los valores de a, b y c.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se sustituyen los valores de $a = 3$, $b = -6$ y $c = -9$

Recuerda sustituir los valores de a, b y c con todo y sus signos originales.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(-9)}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - (12)(-9)}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + (108)}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$-(-6) = 6$
porque se aplica la regla de la multiplicación de los signos, de acuerdo con la cual negativo por negativo da positivo.

Luego de este paso, se toma primero el signo positivo para hacer la operación:

$$x_1 = \frac{6 + 12}{6}$$

$$x_1 = \frac{18}{6}$$

$$x_1 = 3$$

Una vez encontrado el valor de x_1, se vuelven a realizar las operaciones, pero ahora con signo negativo:

$$x_2 = \frac{6 - 12}{6}$$

$$x_2 = \frac{-6}{6}$$

$$x_2 = -1$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $3x_2 - 6x - 9 = 0$ son:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Para comprobar, se sustituyen los valores de $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$ en la ecuación original:

$$3x^2 = 6x + 9$$

Para $x_1 = 3$

$$3(3)^2 = 6(3) + 9$$
$$3(9) = 18 + 9$$
$$27 = 27$$

Para $x_2 = -1$

$$3(-1)^2 = 6(-1) + 9$$
$$3(1) = -6 + 9$$
$$3 = 3$$

TIC

Consulta en la plataforma *Geogebra* el tema de la fórmula general para las ecuaciones cuadráticas por si deseas profundizar en las explicaciones y resolver más ejercicios. También incluye videos.
https://www.geogebra.org/m/GYXrzYEF

Dado que ambos valores satisfacen las igualdades, son los correctos.

Actividad 4. Resuelve la ecuación con la fórmula general.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

PROYECTO

Para finalizar este proyecto, reúne a un grupo de personas para presentarles el tríptico que hiciste. Comenten sobre el tema y establezcan un compromiso para visibilizar la diversidad sexual y de género en su comunidad.

Compromiso colectivo:

Invita a que todas las personas escriban este compromiso individual y a que lo coloquen en algún lugar donde puedan verlo todos los días, para recordarlo y llevarlo a cabo.

Tema 5. Resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas también se pueden utilizar para resolver problemas de la vida cotidiana.

Ejemplo:

Leticia es entrenadora de futbol y compró algunas playeras para su equipo. No se sabe cuántas compró, pero sí que en total pagó \$ 1200.00 Una amiga de Leticia le dijo que, en otra tienda, las mismas playeras cuestan \$ 20.00 menos, tanto así que por los mismos \$ 1200 habría comprado 3 playeras más. ¿Cuántas playeras compró Leticia?

Para modelar el problema, primero se elige qué representará la x. Como en el problema se pide encontrar el número de playeras que compró Leticia, entonces:

$$x = \text{número de playeras que compró Leticia}$$

Se crea la ecuación que modela el problema. Para ello, se sabe que los \$ 1200 que pagó Leticia por las playeras, dividido entre el número de playeras que compró (x), debe dar el precio de cada playera.

Esto, en lenguaje algebraico, se escribe así:

$$\frac{1200}{x} = \text{precio que pagó Leticia por playera}$$

También se sabe que en otra tienda las mismas playeras son $20 más baratas, de manera que con los $1200 Leticia habría podido comprar 3 playeras más.

Esto significa que el **precio de las playeras** puede escribirse de dos maneras con el lenguaje algebraico:

$$\frac{1200}{x} - 20 = \text{precio de las playeras}$$

$$\frac{1200}{x+3} = \text{precio de las playeras}$$

Y como el precio de las playeras en la otra tienda es el mismo, entonces pueden igualarse ambas expresiones:

$$\frac{1200}{x} - 20 = \frac{1200}{x+3}$$

A simple vista parece que esta no es una ecuación cuadrática, para saberlo se debe simplificar.

Primero se debe hacer que la x no esté en los denominadores. Para quitar a la x del lado izquierdo de la ecuación, se multiplican ambos lados de la igualdad por x:

$$x\left(\frac{1200}{x} - 20\right) = x\left(\frac{1200}{x+3}\right)$$

Esto es igual a:

$$\frac{1200x}{x} - 20x = \frac{1200x}{x+3}$$

Las dos x del primer **término pueden cancelarse porque están dividiéndose entre sí**:

$$\frac{1200\cancel{x}}{\cancel{x}} - 20x = \frac{1200x}{x+3}$$

Queda:

$$1200 - 20x = \frac{1200x}{x+3}$$

Ahora se debe quitar el binomio $x + 3$ del denominador en el lado derecho de la igualdad. Esto se logra al multiplicar ambos lados por $x + 3$:

$$(x+3)(1200 - 20x) = \frac{1200x}{x+3}(x+3)$$

El binomio que se agregó al lado derecho de la ecuación pasa al numerador del término que multiplica:

$$(x+3)(1200 - 20x) = \frac{1200x(x+3)}{x+3}$$

Y como está multiplicando al otro término del numerador, puede cancelarse porque $x + 3$ entre $x + 3$ es igual a 1. La ecuación queda así:

$$(x+3)(1200-20x) = 1200x$$

Se hace la multiplicación en el lado izquierdo de la ecuación.

$$1200x - 20x^2 + 3600 - 60x = 1200x$$

Se iguala a cero y se hacen las operaciones, en este caso es una resta:

$$1200x - 20x^2 + 3600 - 60x - 1200x = 0$$

$$-20x^2 - 60x + 3600 = 0$$

Con lo cual puede verse que la ecuación **sí es cuadrática**.

En seguida, se aplica la fórmula para resolverla. En esta ecuación cuadrática, los valores de a, b y c son:

$$a = -20 \qquad b = -60 \qquad c = 3600$$

Al calcular la fórmula general con estos valores, se encuentran las soluciones de la ecuación:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4(-20)(3600)}}{2(-20)}$$

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + (80)(3600)}}{-40}$$

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 288000}}{-40}$$

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{291\,600}}{-40}$$

$$x = \frac{60 \pm 540}{-40}$$

Así, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{60 + 540}{-40} \qquad x_2 = \frac{60 - 540}{-40}$$

$$x_1 = \frac{600}{-40} \qquad x_2 = \frac{-480}{-40}$$

$$x_1 = -15 \qquad x_2 = 12$$

Para comprobar los resultados, en la ecuación original se sustituyen los valores:

Para $\boxed{x_1 = -15}$ $\boxed{x_2 = 12}$

$$\frac{1\,200}{x} - 20 = \frac{1\,200}{x+3} \qquad \frac{1\,200}{x} - 20 = \frac{1\,200}{x+3}$$

$$\frac{1\,200}{(-15)} - 20 = \frac{1\,200}{(-15)+3} \qquad \frac{1\,200}{(12)} - 20 = \frac{1\,200}{(12)+3}$$

$$-80 - 20 = \frac{1\,200}{(-12)} \qquad 100 - 20 = \frac{1\,200}{(15)}$$

$$-100 = -100 \qquad 80 = 80$$

Dado que ambos valores satisfacen las igualdades, son los correctos. En este problema, la respuesta correcta es $x_2 = 12$ porque no tiene ningún sentido comprar "15 playeras negativas". Por lo tanto, Leticia compró 12 playeras.

Actividad 5. Lee el problema y realiza lo que se te pide.

CÓDIGO COMÚN

Pasto sintético: especie de alfombra que simula ser pasto natural.

Se tienen 247 m² de **pasto sintético** para cubrir el piso de un terreno rectangular y se desea que el largo sea 6 metros más grande que el ancho. ¿Cuál es el modelo que resuelve la ecuación?

Opciones de respuesta:

$x + 247 = x$ $\qquad$ $x + 6 = 247$ $\qquad$ $x(x + 6) = 247$

Simplifica la ecuación a su forma cuadrática e iguálala a cero:

$$x(x + 6) = 247$$

Resultado:

En la ecuación cuadrática $x^2 + 6x - 247 = 0$, ¿cuáles son los valores de a, b y c que deben usarse en la fórmula general? Escríbelos en los recuadros.

$a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐

Resuelve la ecuación $x^2 + 6x - 247 = 0$

¿Cuál es el valor de x que permite resolver el problema del terreno rectángular? Calcula sus medidas.

x = ☐ largo = ☐ ancho = ☐

CIERRE

En esta secuencia reconociste las ecuaciones cuadráticas y algunos de sus elementos, aprendiste la fórmula general e identificaste su uso en la vida cotidiana.

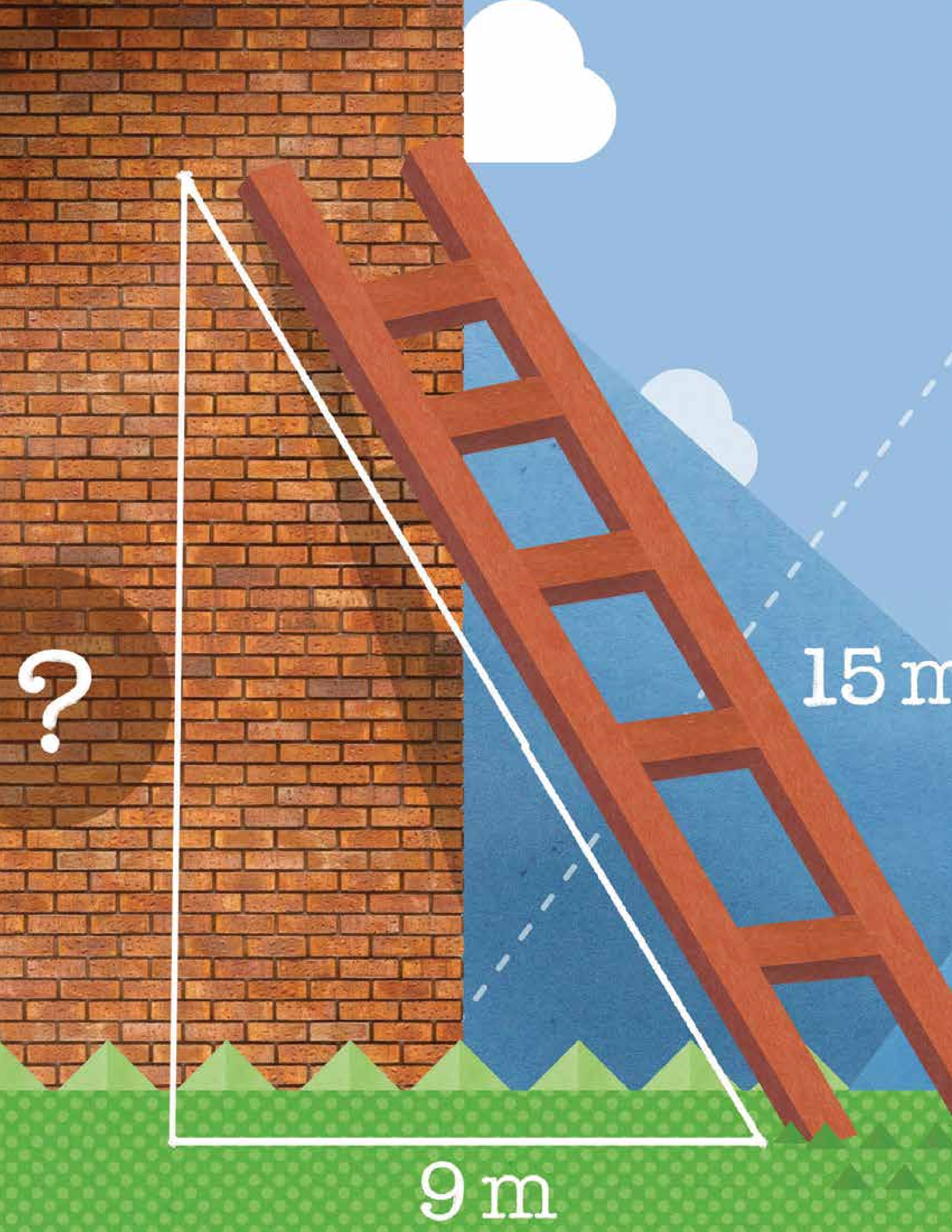
Actividad de cierre. Pon a prueba tus aprendizajes y resuelve la ecuación siguiendo los pasos que ya conoces.

$$x^2 = 16x - 63$$

PROYECTO

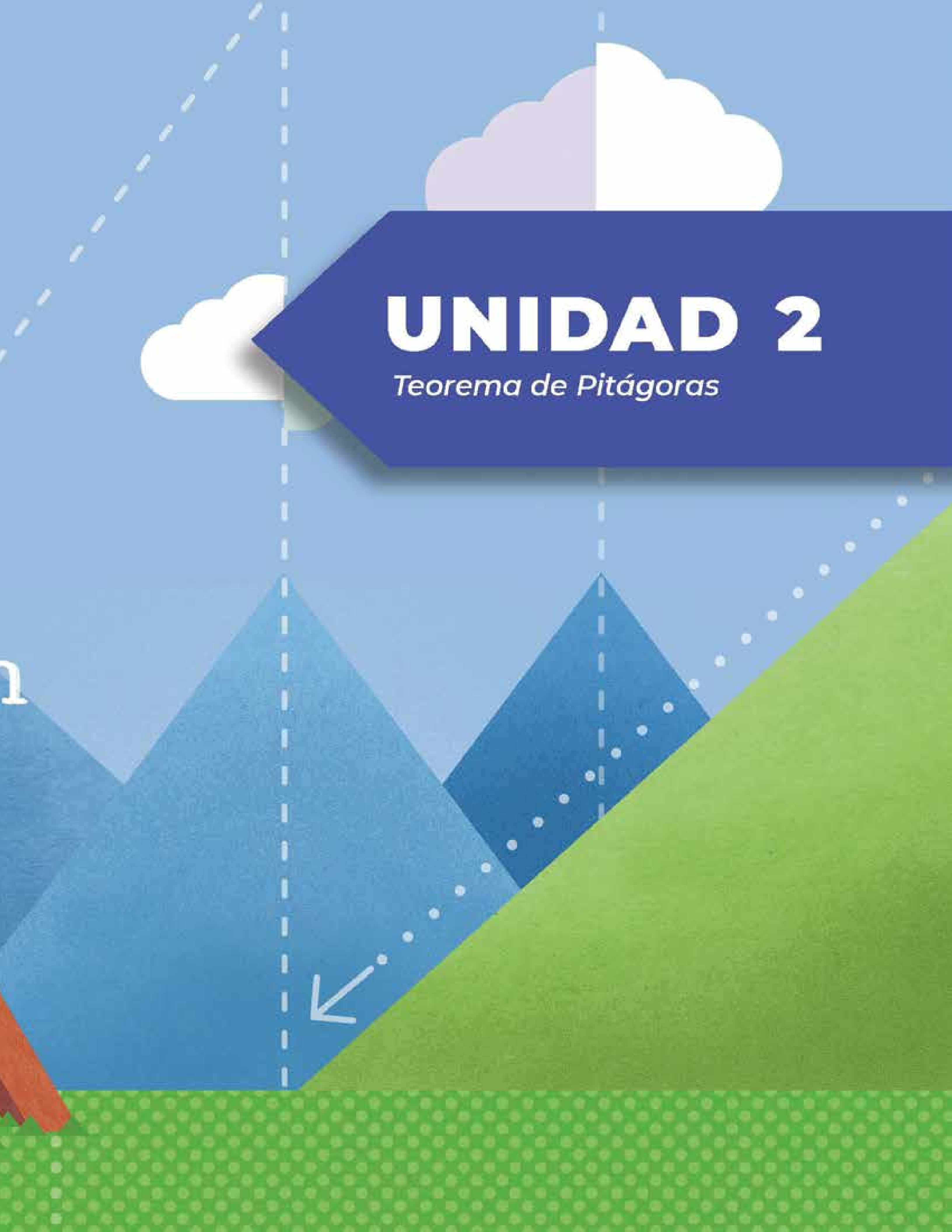
En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Revisé e interpreté una gráfica sobre las características sociodemográficas de la comunidad LGBTTTIQ+.	
Elaboré un tríptico para visibilizar información sobre la comunidad LGBTTTIQ+ y lo di a conocer con otros miembros de mi comunidad.	
Me comprometí a promover activamente la igualdad.	


?
15 m
9 m

UNIDAD 2

Teorema de Pitágoras



En esta unidad conocerás algunas propiedades del triángulo y su importancia para los cálculos espaciales; de este modo, comenzarás por recordar los principales tipos de ángulos y trabajarás con la semejanza de triángulos para calcular proporciones espaciales en la resolución de problemas cotidianos. También identificarás el teorema de Pitágoras, comprenderás su significado, revisarás su representación gráfica; la forma de despejarlo dependiendo de las necesidades, y resolverás problemas con apoyo de esta herramienta.

Con el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia* utilizarás tus conocimientos adquiridos para adecuar un espacio que se encuentre abandonado o en mal uso en tu colonia o comunidad, mediante la organización y el trabajo colectivo con otras personas.

Secuencia

5

El triángulo rectángulo

En esta secuencia repasarás algunos temas que ya trabajaste en módulos anteriores, pero ahora con mayor detalle para adentrarte en el estudio del triángulo rectángulo, figura de la cual ya conoces su importancia y que trazarás mediante distintos métodos.

PROYECTO

También comenzarás el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia* con el objetivo de mejorar algún espacio de tu colonia o comunidad que lo requiera, junto con otras personas.

Las actividades a desarrollar en esta secuencia son las siguientes:

- Reunión con otras personas de la comunidad para seleccionar el espacio a recuperar.
- Evaluación del estado físico que guarda el lugar seleccionado.

Recuerda que usamos el ícono **PROYECTO** para diferenciar las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Para recuperar tus aprendizajes previos, marca con una paloma ✓ si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

AFIRMACIONES	V	F
▪ Todos los cuadrados tienen la misma forma, pero diferente tamaño.		
▪ Todos los triángulos tienen la misma forma, pero diferente tamaño.		
▪ Todas las figuras de cuatro lados tienen la misma forma, pero diferente tamaño.		
▪ Hay una cantidad infinita de formas en las que se pueden cruzar dos líneas.		
▪ Todas las líneas rectas se cruzan en algún punto si las extendemos lo suficiente.		

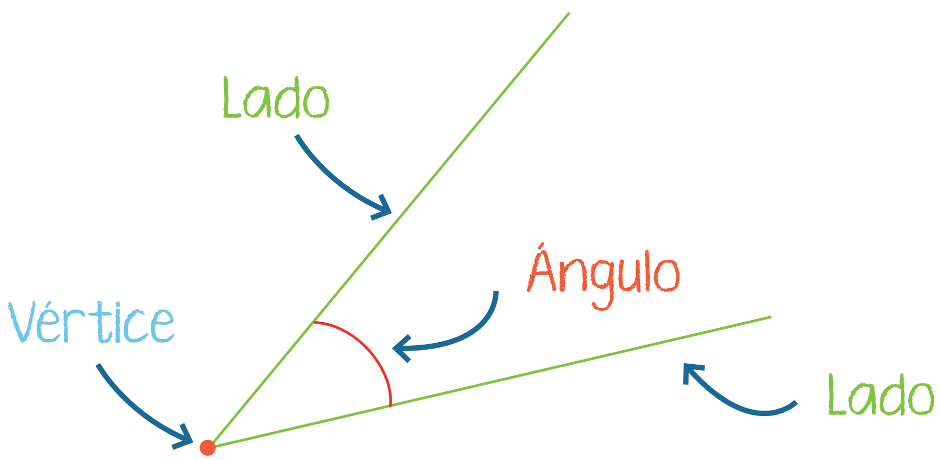
DESARROLLO

Tema 1. Ángulo: definición y clasificación

Un **ángulo** se forma a partir de la **intersección** de dos rectas o segmentos de recta que comparten un punto en común. A este punto se le conoce como **vértice del ángulo**.

CÓDIGO COMÚN

Intersección: punto donde se encuentran dos líneas.



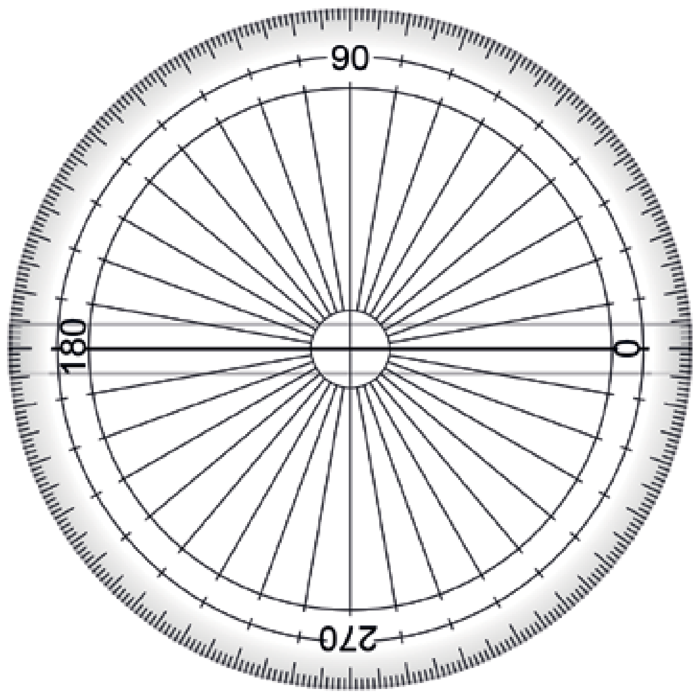
A las rectas que forman un ángulo se les conoce como **lados del ángulo**. La medida de un ángulo no depende de la longitud de sus lados sino del espacio (apertura) entre las rectas. Es decir, el ángulo es el espacio entre dos rectas unidas por un punto.

La unidad más utilizada para medir ángulos es el **grado sexagesimal**. Un ángulo completo mide 360°, es decir, una vuelta completa o círculo. Por lo tanto, medio círculo mide 180° de amplitud y la cuarta parte de un círculo mide 90°.

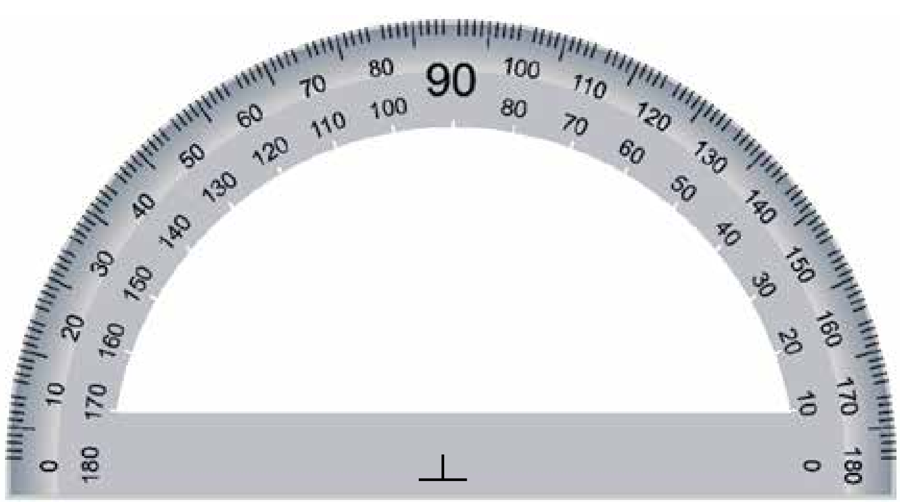
TIC

Te sugerimos visitar este enlace para leer más sobre los ángulos en la página del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM): https://www.bit.ly/3UuXqSf

En la siguiente figura puedes ver cómo se miden los grados a lo largo de una circunferencia, empezando por el lado derecho (0°) y contando hacia la izquierda (en la dirección contraria a las manecillas del reloj):

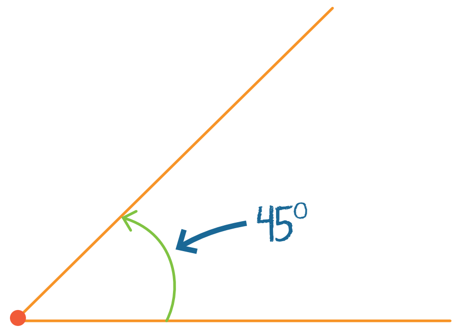


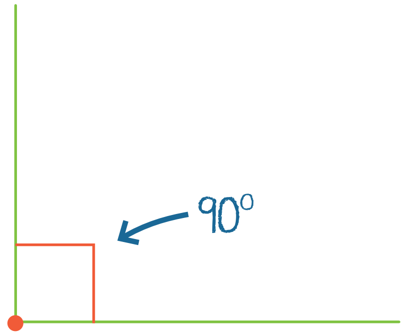
Para medir ángulos usualmente se utiliza un transportador. A continuación, puedes ver una imagen de esta herramienta.



Existen diferentes tipos de ángulos, en función de sus medidas pueden ser:

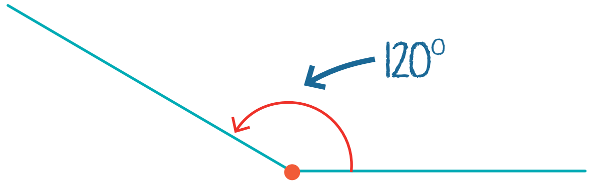
Ángulo agudo: es aquel que mide **más de 0° y menos de 90°**.



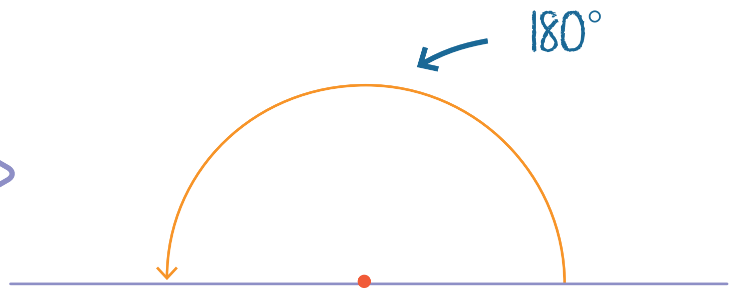


Ángulo recto: es aquel que mide exactamente **90°**.

Ángulo obtuso: es aquel que mide **más de 90° y menos de 180°**.

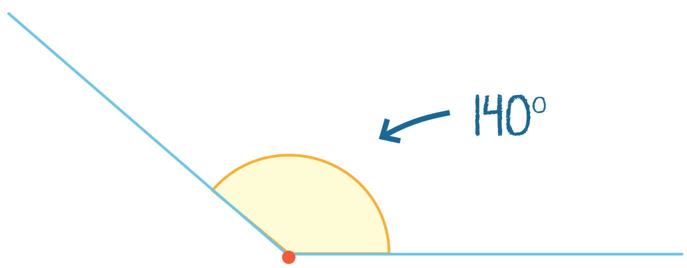


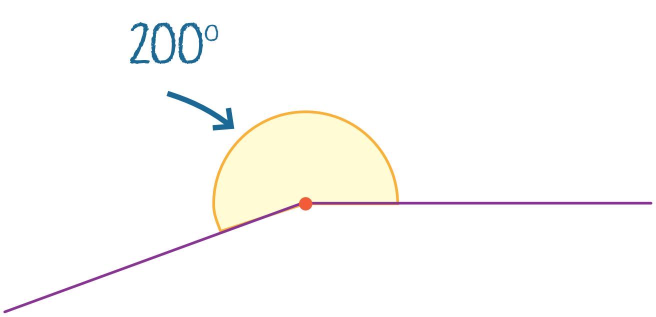
Ángulo llano: es el que mide **180°.**



El ángulo llano es la referencia para determinar otros dos tipos de ángulos: el **convexo** y el **cóncavo**:

Ángulo convexo: mide **menos de 180°**; es decir, es menor que un ángulo llano.





Ángulo cóncavo: mide **más de 180°**.

Actividad 1. **Aplica los conocimientos que has adquirido.**

a) Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué unidad de medida se utiliza para medir ángulos?

   ____

2. ¿Cuántos grados mide un círculo?

   ____

3. ¿Qué nombre se le da a un ángulo menor de 90°?

   ____

4. ¿Cuál es el nombre de un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°?

   ____

5. ¿Cómo se llama el ángulo que mide 90°?

   ____

6. ¿Cómo se denomina un ángulo que mide exactamente 180°?

   ____

7. ¿Qué diferencia hay entre un ángulo cóncavo y uno convexo?

   ____

b) Dibuja un círculo en el espacio y marca con color rojo los ángulos rectos que se necesitan para completar una vuelta (360°).

Se necesitan ________________ ángulos rectos para completar una vuelta (360°)

PROYECTO

Reúnete con otras personas de tu comunidad para iniciar el proyecto. Pueden ser familiares, amistades, vecinos o integrantes de tu *Círculo de estudio*. El objetivo es rehabilitar o recuperar un espacio de convivencia comunitaria que se encuentre en mal estado o abandonado, para regresarlo a un estado funcional o para mejorarlo.

Este espacio puede ser un parque, un centro deportivo, una plaza, una calle, entre otros espacios, donde se reúnan las familias de la comunidad para convivir.

a) Haz un listado de los espacios de convivencia que conoces e identifica los que se encuentran en malas condiciones.

b) Ponte de acuerdo con las personas que participarán y selecciona uno de los lugares enlistados en el que sea posible trabajar para su rehabilitación.

c) Escribe su nombre o como se le conoce:

CONEXIONES

Repasa en la secuencia 5 de la unidad 2 del módulo *Pensamiento matemático 3*, las unidades para medir longitud y área.

Tema 2. Rectas

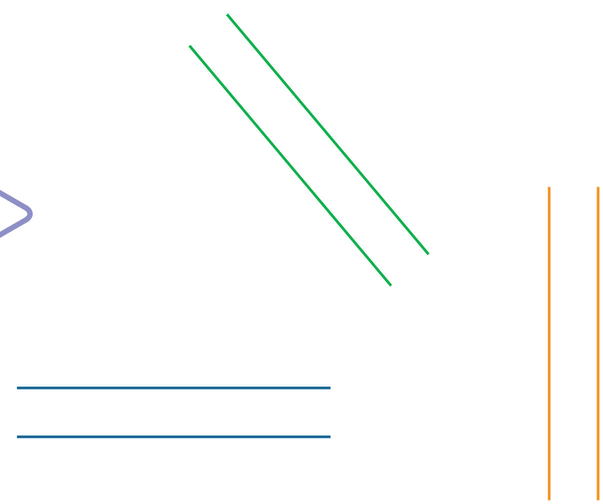
Una línea recta no tiene ninguna curvatura y no tiene principio ni fin porque se extiende hasta el infinito. Las líneas que tienen una longitud determinada (tienen principio y fin) se conocen como **segmentos de recta**.

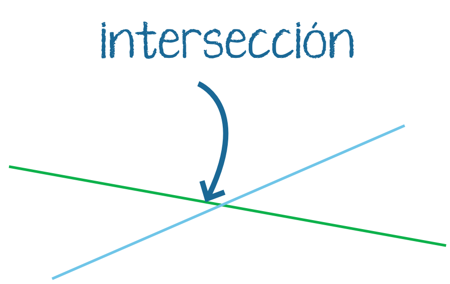
Una línea recta mantiene constante su inclinación, a la cual también se le conoce con el nombre de **pendiente**.

Hay distintos tipos de rectas.

De acuerdo con su posición con respecto a otra, las líneas rectas se clasifican en **paralelas** y **secantes**.

Rectas paralelas: son aquellas que están en el mismo plano, pero **nunca se intersectan**, es decir, nunca se cruzan entre sí, por más que se prolonguen.

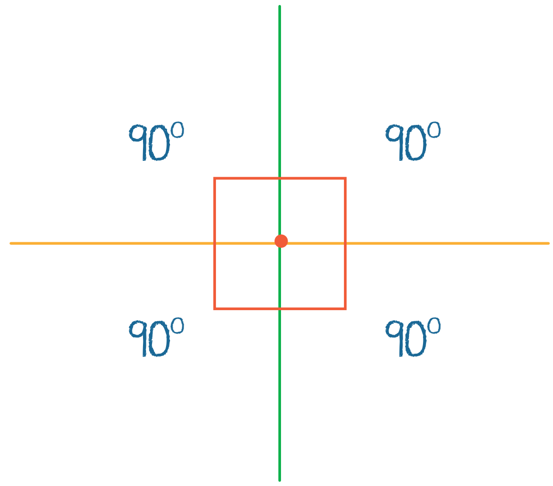


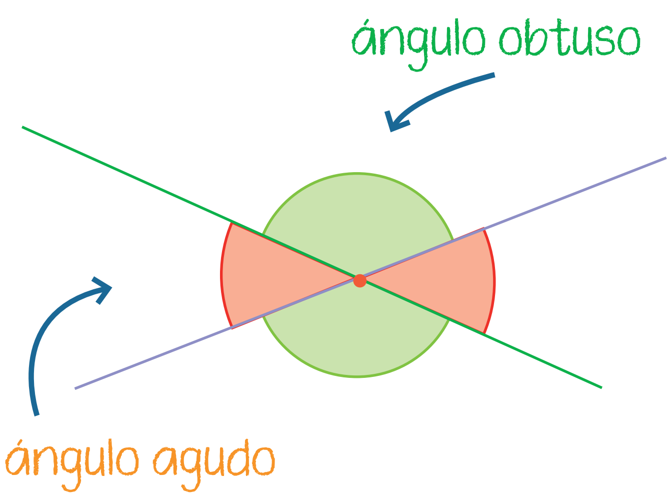


Rectas secantes: son aquellas que, al prolongarse lo suficiente, se cruzan, intersectan o cortan entre sí.

Existen dos tipos de **rectas secantes**: las **perpendiculares** y las **oblicuas**.

Rectas perpendiculares: son aquellas que, al cruzarse, forman ángulos de **90°** entre sí.

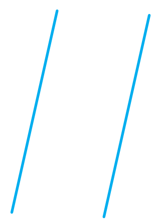


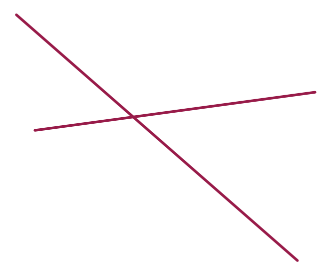


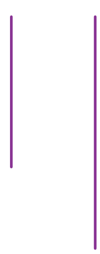
Rectas oblicuas: son aquellas que, al cruzarse, forman dos ángulos agudos iguales y dos ángulos obtusos iguales. Los ángulos iguales son opuestos.

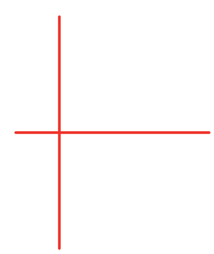
Actividad 2. Escribe el nombre que corresponde a cada par de rectas.

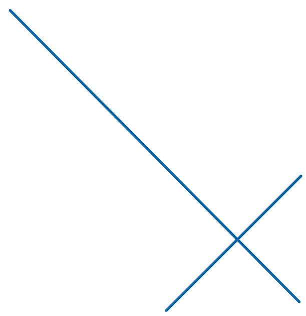
Rectas paralelas	Rectas secantes perpendiculares	Rectas secantes oblicuas

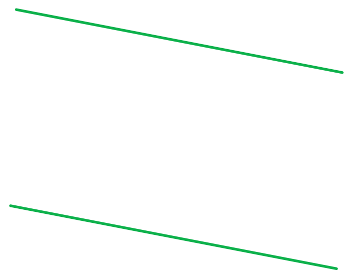


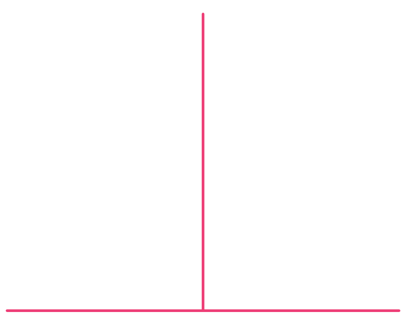


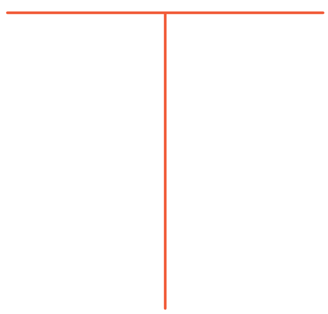


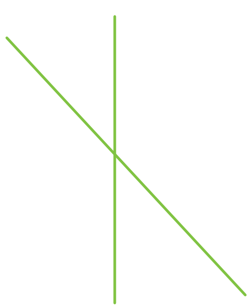


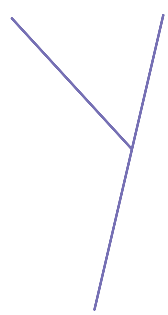












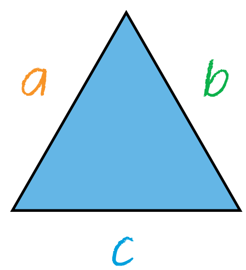
Tema 3. Propiedades del triángulo rectángulo

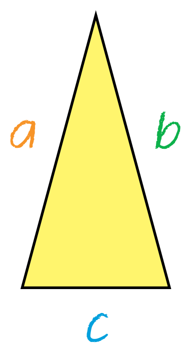
Un triángulo es una figura geométrica o un polígono de tres lados. Los puntos donde los lados de un polígono se cortan o tocan se conocen con el nombre de **vértices**.

En geometría, los triángulos se representan con el **símbolo** Δ. De acuerdo con las características de sus lados, se clasifican en:

Triángulo equilátero: es aquel cuyos tres lados miden lo mismo.

$a = b = c$



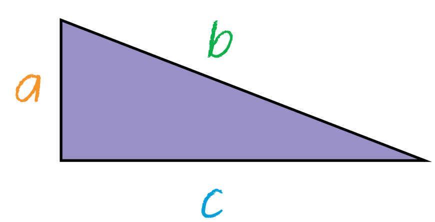


Triángulo isósceles: tiene dos lados iguales y uno desigual.

$a = b \neq c$

Triángulo escaleno: tiene los tres lados desiguales.

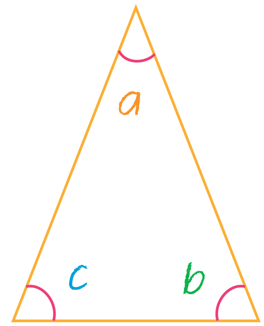
$a \neq b \neq c$

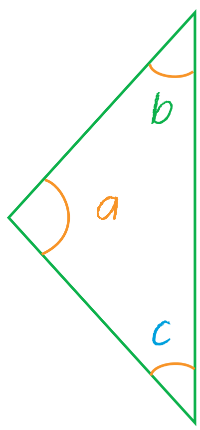


Los triángulos también se pueden clasificar de acuerdo con las medidas de sus ángulos:

Triángulo acutángulo: tiene todos sus ángulos agudos.

Ángulos a, b y c menores de 90°



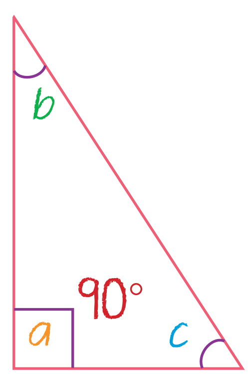


Triángulo obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

Ángulo a mayor de 90°

Triángulo rectángulo: tiene un ángulo recto.

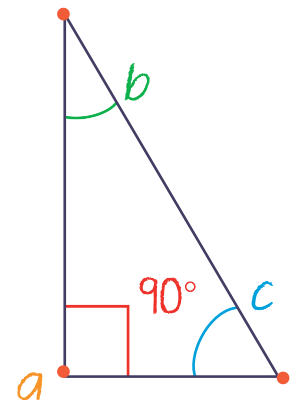
Ángulo a = 90°



Un triángulo rectángulo puede **ser isósceles o escaleno**. Sin importar en cuál de las dos clasificaciones se encuentren, los triángulos rectángulos **son muy útiles** ya que tienen ciertas características especiales.

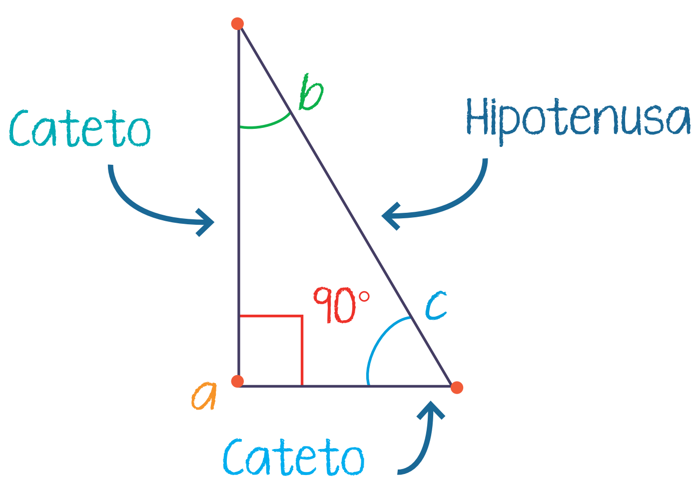
Por ejemplo: la suma de sus dos ángulos agudos es igual a 90°.

ángulo b + ángulo c = 90°



Como puedes ver en la figura, el ángulo recto se representa con un pequeño cuadrado, mientras que los dos ángulos agudos se representan con una línea curva.

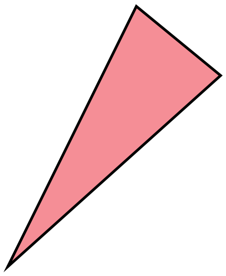
Los lados de un triángulo rectángulo reciben nombres especiales. Así, los lados que forman el ángulo recto se conocen con el nombre de **catetos**, mientras que el lado que está enfrente del ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**.



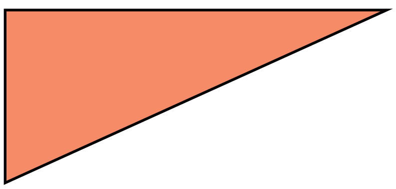
En los triángulos rectángulos se cumple el **teorema de Pitágoras**, que estudiarás más adelante.

Actividad 3. Refuerza tus aprendizajes y haz lo que se te pide.

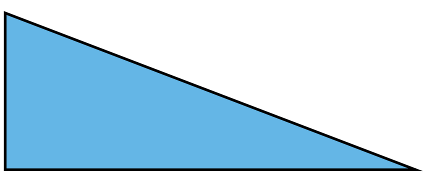
a) Marca con una paloma ✓ si los siguientes son triángulos rectángulos o no.



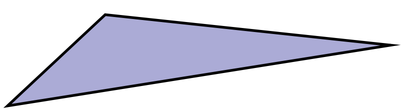
Es triángulo rectángulo ☐ No es triángulo rectángulo ☐



Es triángulo rectángulo ☐ No es triángulo rectángulo ☐

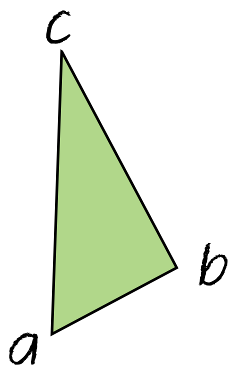


Es triángulo rectángulo ☐ No es triángulo rectángulo ☐

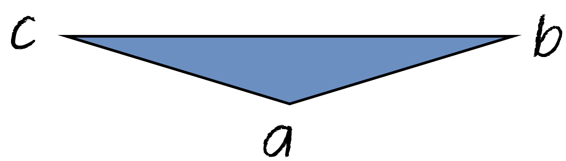


Es triángulo rectángulo ☐ No es triángulo rectángulo ☐

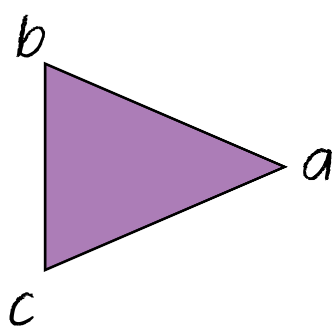
b) Mide con tu transportador los ángulos de cada triángulo y anótalos.



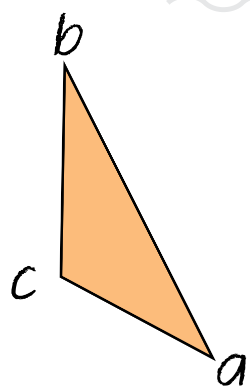
- $a =$ ______________________
- $b =$ ______________________
- $c =$ ______________________



- $a =$ ______________________
- $b =$ ______________________
- $c =$ ______________________



- $a =$ ______________________
- $b =$ ______________________
- $c =$ ______________________



- $a =$ ______________________
- $b =$ ______________________
- $c =$ ______________________

c) Responde las preguntas con base en tus mediciones.

1. ¿Cuántos triángulos de la página anterior tienen todos sus ángulos iguales?

2. ¿Algún triángulo tiene un ángulo recto? De ser así, ¿de qué color es?

3. ¿Hay triángulos con dos ángulos iguales y el otro distinto? De ser así, de qué color o colores son?

4. ¿Cuánto midió el ángulo más grande?

5. ¿Cuánto midió el ángulo más pequeño?

6. Suma los ángulos de cada triángulo, ¿cuánto da como resultado?

7. Explica por qué la suma de los ángulos de cada triángulo da el mismo resultado para todos.

PROYECTO

Ya seleccionaron el lugar, ahora invita a las personas a hacer un recorrido exploratorio para evaluar la situación en que se encuentra.

a) En lo posible, toma fotografías.
b) Describe el estado del lugar, si está sucio o limpio, las condiciones en las que se encuentra su mobiliario (bancas, canchas, juegos infantiles, alumbrado).
c) Llena el formato para evaluar el espacio.

Espacio de recuperación

Nombre del lugar: ______________________

Ubicación o dirección: ______________________

Fecha de elaboración: ______________________

Describe la situación que guarda el espacio respondiendo las siguientes preguntas

¿Hay basura en el lugar?

____

¿Cuenta con alumbrado público?, ¿en qué condiciones?

____

¿Qué instalaciones tiene y cómo se encuentran?

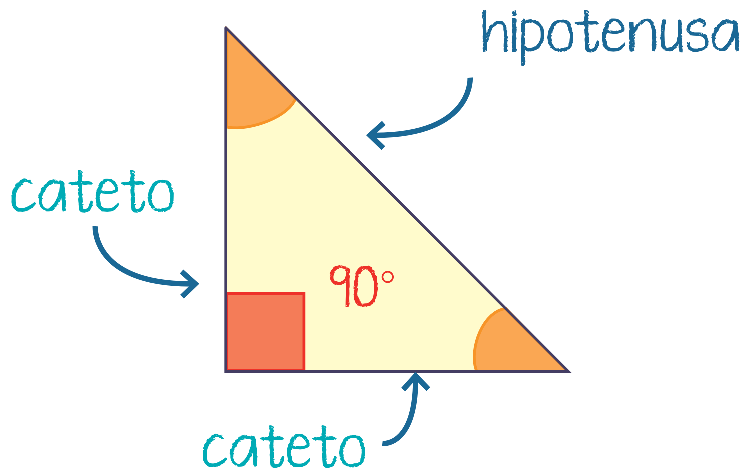
¿Quiénes utilizan el espacio?

Otras observaciones

Comparte esta información con más personas para que participen en el proyecto.

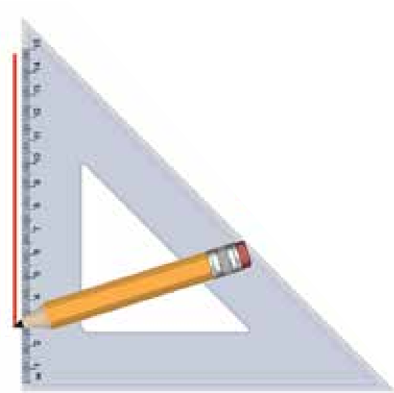
Tema 4. Construcción de un triángulo rectángulo

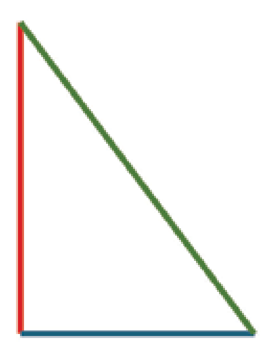
Recuerda que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, es decir, de noventa grados. Esto significa que sus catetos son perpendiculares entre sí.



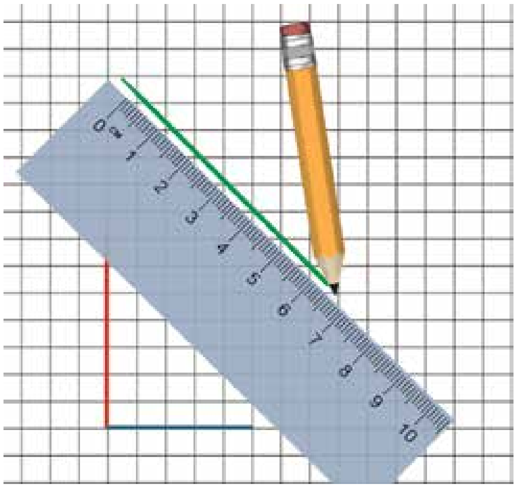
Existen varias maneras de construir un triángulo rectángulo.

Si estás trabajando en una hoja blanca, puedes trazarlo con ayuda de una escuadra. Esto te ayudará a dibujar los catetos del triángulo (las dos líneas con un ángulo de 90° entre sí). Las líneas pueden ser tan largas como quieras. Una vez que las hayas dibujado, únelas trazando la hipotenusa con la inclinación que prefieras para así formar el triángulo rectángulo.



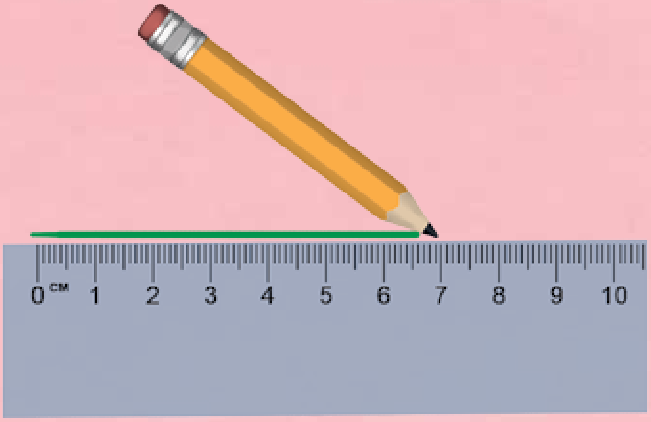


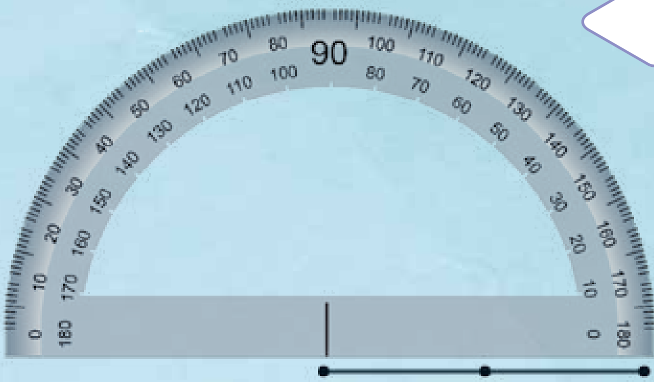
Si estás trabajando en un cuaderno con hojas cuadriculadas, puedes utilizar una regla para trazar los catetos sobre las líneas perpendiculares formadas por los cuadros. Después tienes que trazar la hipotenusa.



Otra forma de dibujar un triángulo rectángulo es con ayuda de una regla y un transportador.

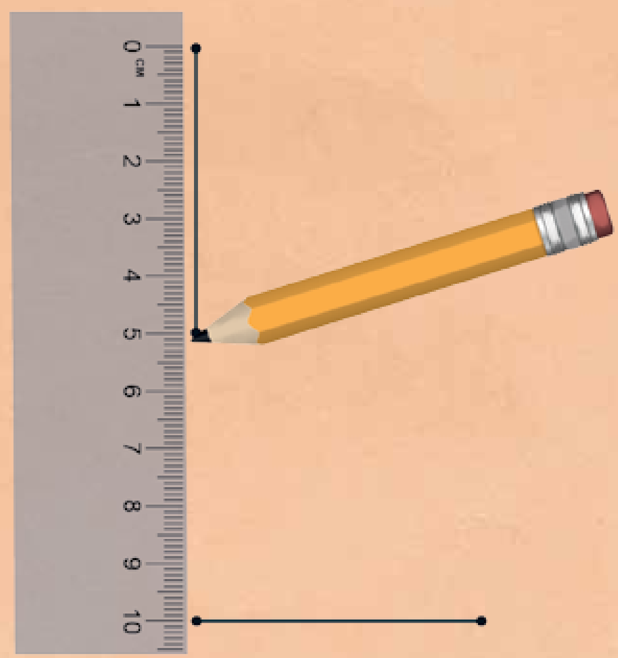
Para ello, primero traza una línea recta horizontal con ayuda de la regla.

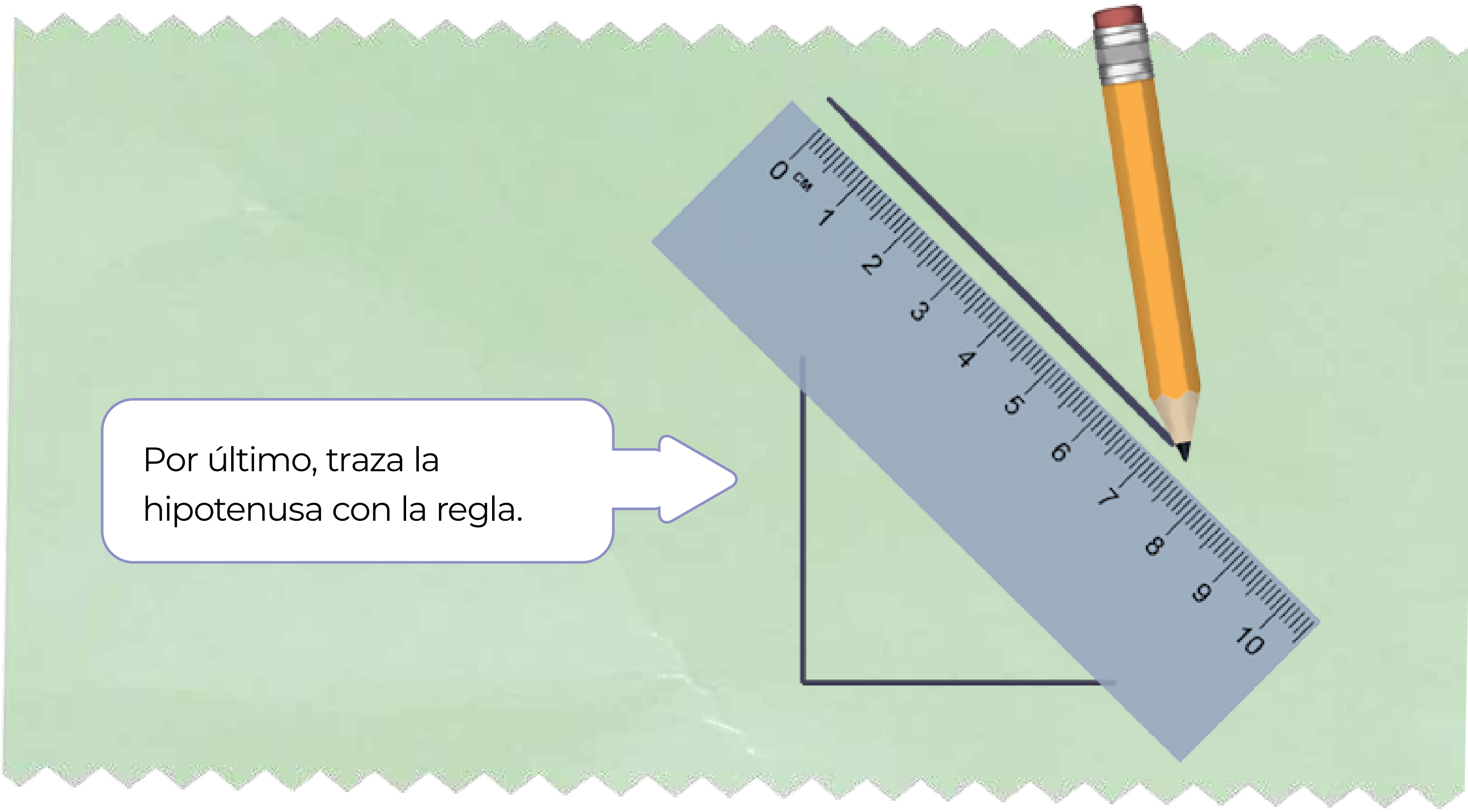




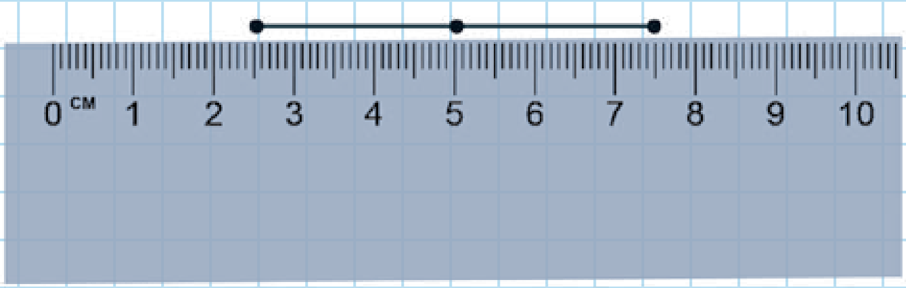
Después traza un punto sobre la recta. Alinea la marca central del transportador con el punto que trazaste sobre la recta horizontal y señala con una marca sobre 90° del transportador.

Ubica la marca de 90° y traza una recta vertical que la una con el punto sobre la recta horizontal que marcaste anteriormente. Las dos rectas que dibujaste son perpendiculares entre sí.



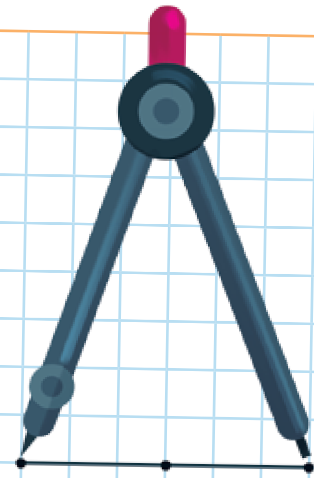


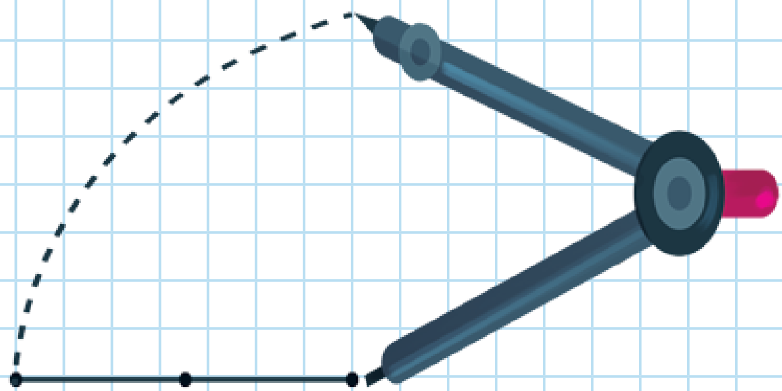
También puedes trazar un triángulo rectángulo con un compás y una regla.



Primero traza una línea recta con la regla. Ubica tres puntos: dos en los extremos de la línea horizontal y uno justo a la mitad. Para ubicar el punto medio, usa la escala de la regla.

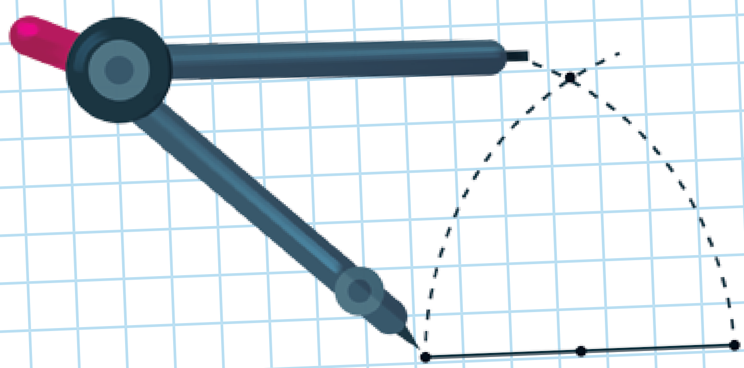
Apoya la punta de tu compás sobre uno de los extremos de la línea. Ábrelo hasta que la otra punta llegue al segundo extremo de la línea.



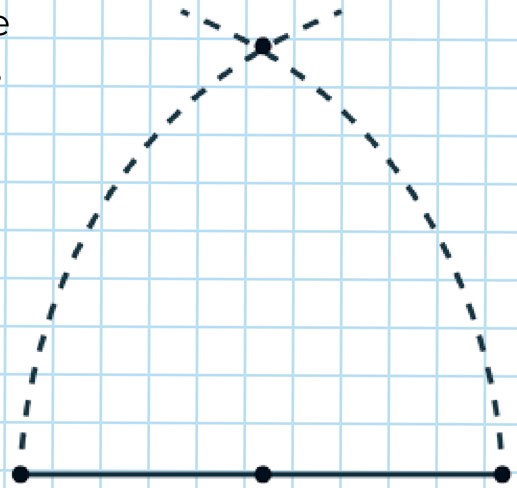


Con esa abertura del compás, traza un arco sobre la línea.

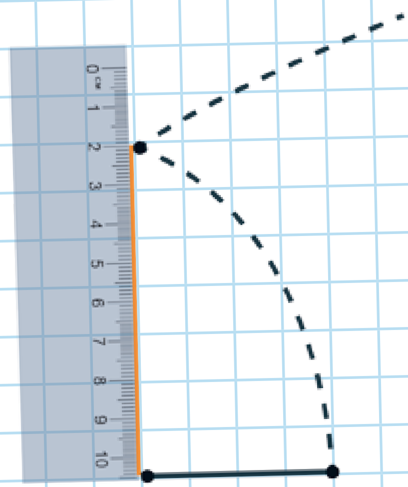
Repite el proceso ahora comenzando desde el otro extremo.

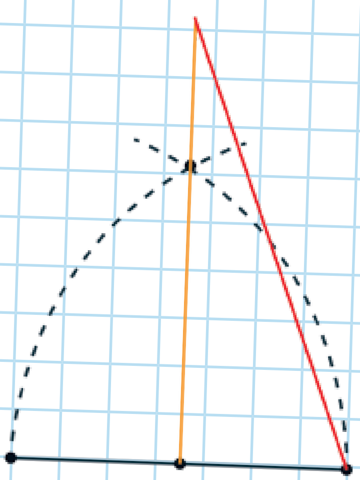


Asegúrate de que los arcos se crucen.



Traza una línea vertical desde el punto medio de la recta horizontal hasta el punto en el que se intersectan los arcos. Puedes prolongar la línea vertical tanto como quieras.





Finalmente, une la línea vertical con uno de los extremos de la línea horizontal para formar la hipotenusa del triángulo.

Practica las formas para trazar un triángulo rectángulo y descubre cuál se te facilita más.

TIC

Otra forma de trazar triángulos rectángulos en computadora es con ayuda de la plataforma de *Geogebra*. Visita el enlace: https://www.geogebra.org/geometry

En este video encontrarás un tutorial: https://bit.ly/3DKOaTp

Actividad 4. Dibuja triángulos rectángulos con cada método que revisaste.

1. Con una escuadra.

2. Con regla y papel cuadriculado.

3. Con regla y un transportador.

4. Con un compás y una regla.

a) Responde las preguntas siguientes.

1. ¿Cuál método se te facilitó más y por qué?

2. ¿Qué objeto cotidiano podrías utilizar para reemplazar un transportador, una regla o un compás?

3. Traza en tu cuaderno un triángulo rectángulo con el objeto mencionado y describe el proceso que seguiste.

4. Mide los ángulos del triángulo que trazaste. ¿El triángulo dibujado con ayuda del objeto tiene un ángulo de 90°?

CIERRE

En la secuencia has revisado algunos temas ya conocidos, como los ángulos y los tipos de línea. También estudiaste el triángulo rectángulo y lo trazaste con distintos métodos.

Actividad de cierre. Para reforzar tus conocimientos, completa el texto escribiendo en los espacios vacíos las palabras que faltan.

isósceles | grados | paralelas | recto | equilátero

secantes | escaleno | abertura | perpendiculares

Un ángulo es la ______________________ entre dos segmentos de recta que se unen en un vértice.

Los ángulos nos ayudan a medir ______________________ entre dos rectas o segmentos. Los ángulos se miden en ______________________.

El ángulo ______________________ es aquel que mide exactamente 90° y se puede encontrar en las esquinas de una habitación. Las rectas ______________________ se cortan formando un ángulo recto, mientras que las rectas ______________________ se cortan en cualquier ángulo diferente de 90°. Las rectas ______________________ jamás se cruzan.

Si un triángulo tiene sus tres lados iguales, entonces es un triángulo ______________________ pero si tiene sus tres lados desiguales entonces es un ______________________.

hipotenusa | 90^0 | catetos | Pitágoras

Los triángulos rectángulos se caracterizan por tener un ángulo de ______________________________ y solo en ellos se cumple el teorema de ___________________________.

Los dos lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto se denominan ___________________________ y el lado que está enfrente del ángulo recto se conoce con el nombre de _______________.

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Me reuní con otras personas de la comunidad para seleccionar algún espacio público que requiere rehabilitación.	
Seleccioné el lugar para su recuperación.	
Evalué el estado físico que guarda el lugar seleccionado.	

Secuencia

6

Semejanza de triángulos

En esta secuencia conocerás e identificarás triángulos semejantes, construirás algunos y resolverás problemas utilizando estas figuras.

PROYECTO

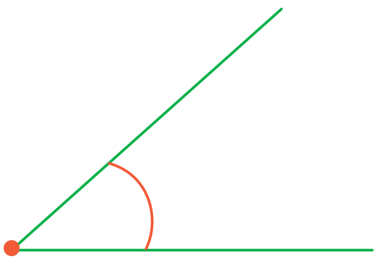
Continuarás con el desarrollo del proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia*, con las actividades siguientes:

- Listado de actividades a realizar para rehabilitar el lugar.
- Medición de las alturas de los principales elementos del lugar.
- Elaboración de maqueta del espacio a rehabilitar.

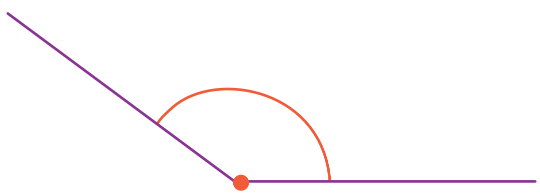
Recuerda que el ícono **PROYECTO** se utiliza para distinguir las actividades del proyecto.

INICIO

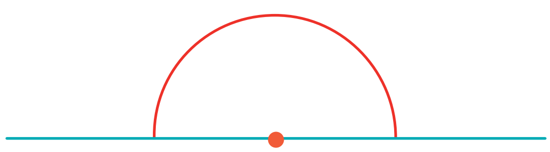
Actividad de inicio. Relaciona con una línea el tipo de ángulo con su nombre.



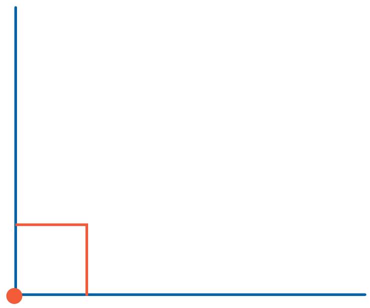
Ángulo llano



Ángulo agudo



Ángulo recto

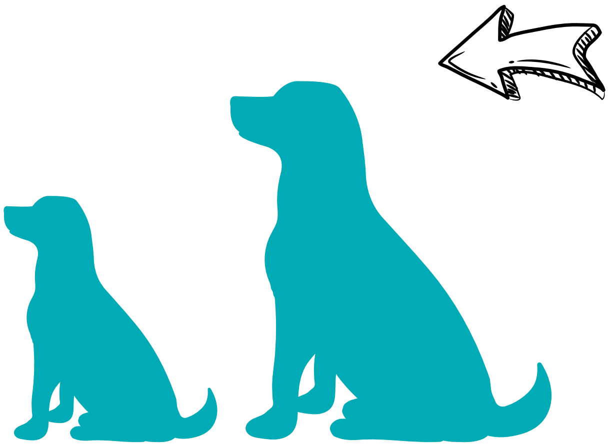


Ángulo obtuso

Tema 1. Triángulos semejantes

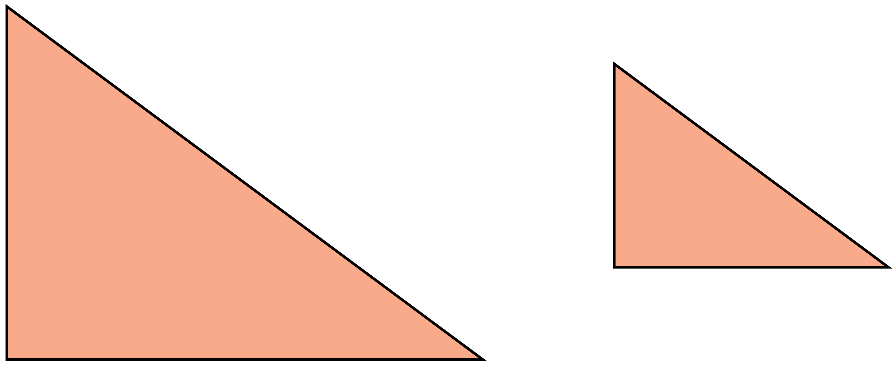
En geometría, cuando dos figuras tienen la misma forma se dice que son **semejantes**.

Ejemplo:



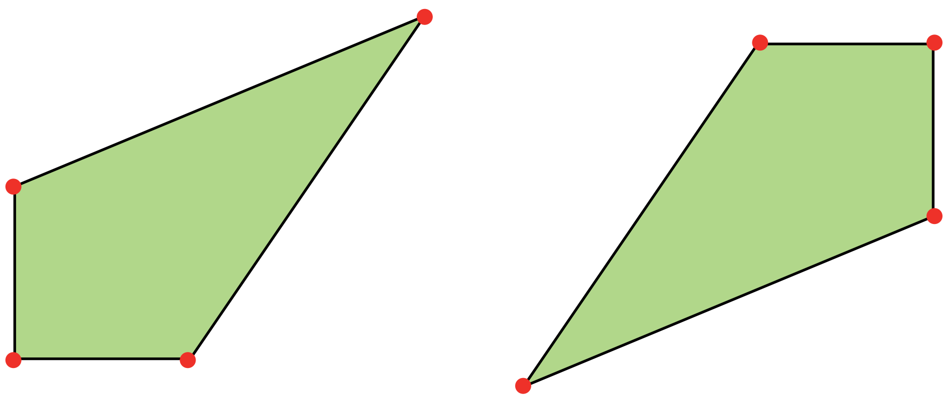
Las siluetas que se muestran son figuras semejantes porque tienen la misma forma aunque son de tamaños distintos. Es decir, para que dos figuras sean semejantes, **basta con que tengan la misma forma independientemente de su tamaño**.

En el caso de los triángulos, para que dos o más de ellos sean **semejantes**, sus **lados correspondientes deben ser proporcionales y sus ángulos iguales**. Puede sonar complicado, pero es lo que mencionamos antes: deben tener la misma forma sin importar su tamaño.

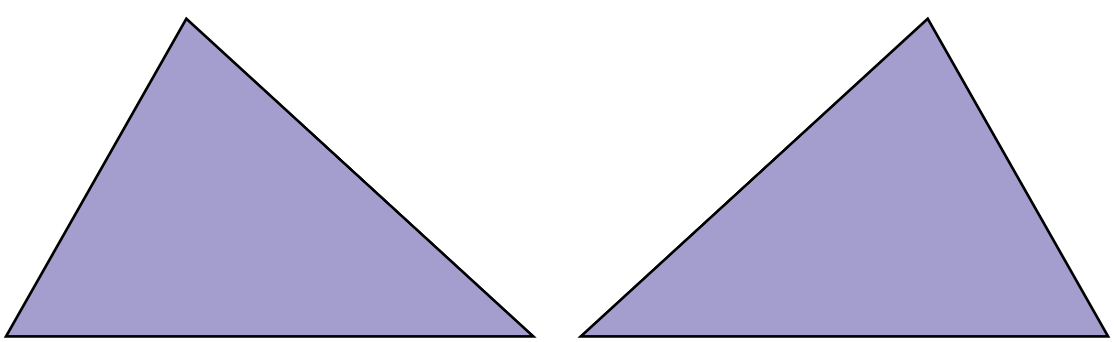


Si además de su forma comparten el mismo tamaño, se dice que son **congruentes**. Es decir, dos figuras son congruentes si **tienen la misma forma y tamaño**.

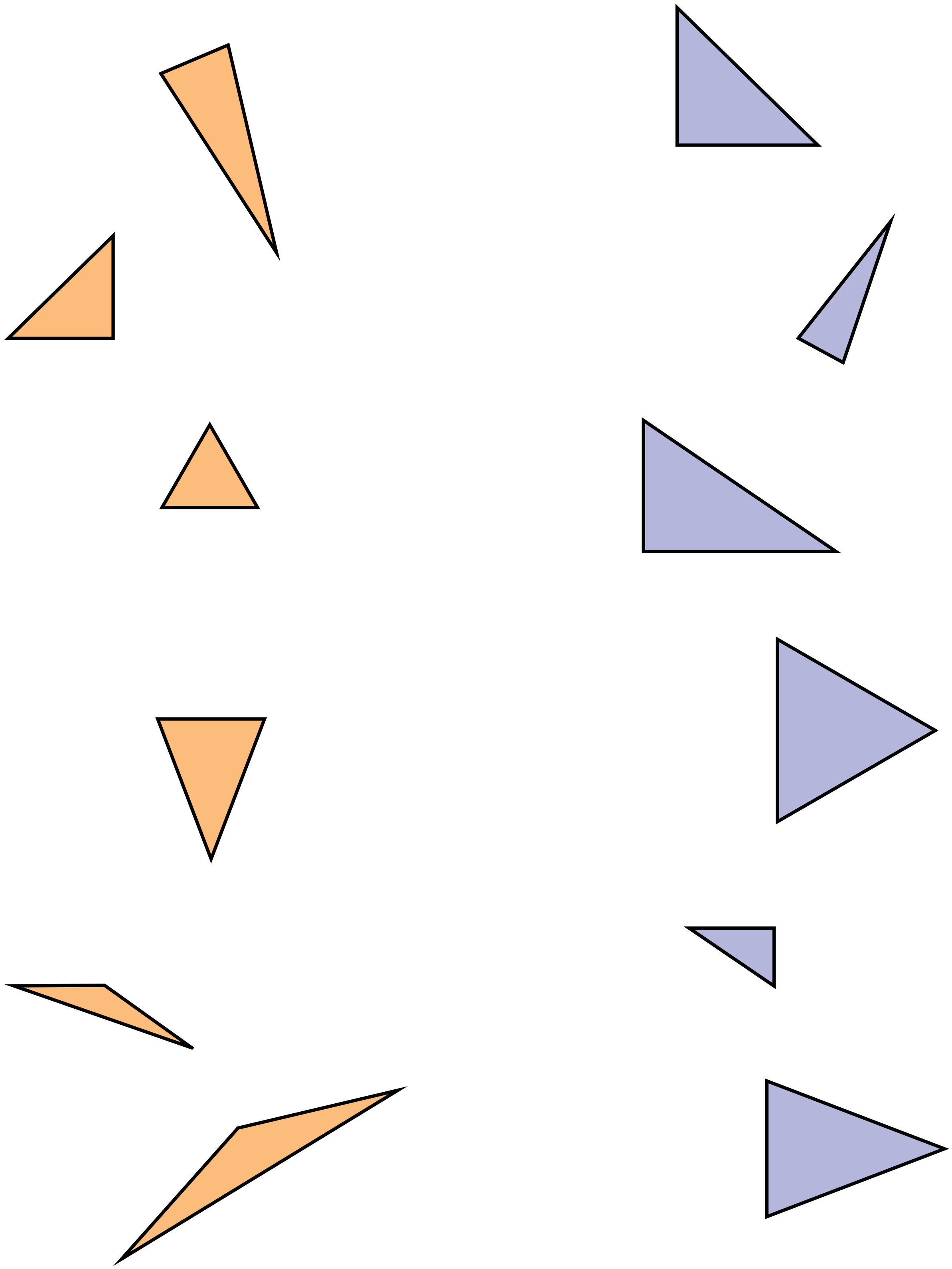
Puede ocurrir que dos figuras congruentes estén acomodadas de formas distintas, pueden variar de orientación, posición inclinación, etc. Esto no afecta la congruencia siempre y cuando sus lados y ángulos correspondientes tengan las mismas medidas.



Esto mismo aplica para los triángulos. Es decir, si dos triángulos tienen el mismo tamaño y la misma forma son **congruentes** sin importar cómo se encuentren acomodados. Por ejemplo, los siguientes dos triángulos son congruentes aunque uno parece el reflejo del otro.



Actividad 1. Identifica los pares de triángulos semejantes y relaciónalos con una línea.



PROYECTO

Para retomar el proyecto, reúnete con las otras personas que están participando y, con base en las fotografías y la evaluación realizada, determinen cuáles son las actividades de rehabilitación que pueden realizar en el espacio seleccionado.

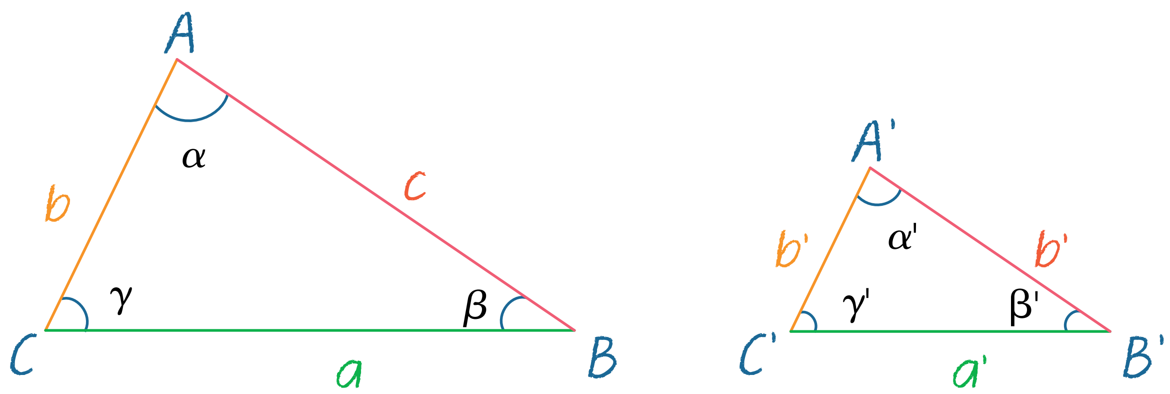
a) Elabora un listado de lo que debe hacerse para mejorar el espacio. Por ejemplo, recoger basura, deshierbar, pintar alguna estructura, reparar una banca, plantar árboles, entre otras actividades. Escríbelas en el orden en que se van a realizar estas tareas en el recuadro siguiente.

Actividades para rehabilitar el espacio

Invita a otras personas de la colonia o comunidad para que se involucren y colaboren.

Tema 2. Relación matemática entre los triángulos semejantes

Los **triángulos semejantes** tienen ángulos de la misma medida y sus lados guardan cierta proporcionalidad. Por ejemplo, los dos triángulos mostrados a continuación son semejantes:

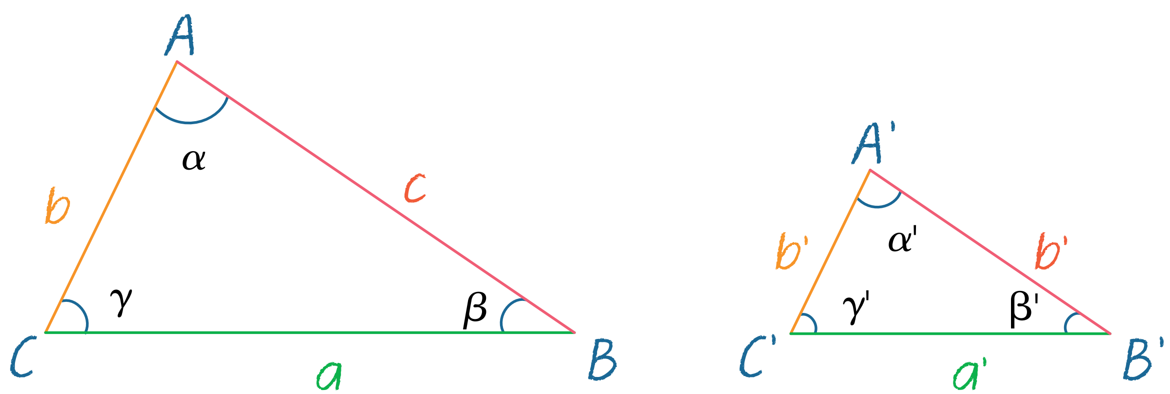


Para establecer relaciones de proporcionalidad entre los lados y ángulos de los triángulos, primero debemos nombrarlos. Por **convención**, los vértices se nombran con letras mayúsculas, los lados con letras minúsculas y los ángulos con letras griegas.

Con base en lo anterior, los triángulos quedarían entonces de la siguiente manera:

CÓDIGO COMÚN

Convención: cuando dos o más personas, organizaciones, países, etc. se ponen de acuerdo para nombrar algo de cierta forma.



El nombre de un triángulo se crea al juntar las letras que se le dan a sus vértices. Por ejemplo, el primer triángulo de la imagen anterior recibe el nombre de triángulo *ABC*, mientras que el segundo se llama triángulo *A'B'C'*. También se escriben ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

Símbolo	Cómo se lee
α	alfa
β	beta
γ	gama
$'$	prima

Todos los símbolos en la tabla, excepto el último, son letras griegas.

Utilizando la información de la tabla, podemos decir que las letras *A'*, *B'* y *C'* se leen como "*A* prima", "*B* prima" y "*C* prima". Lo mismo ocurre con las letras griegas si les agregas este símbolo. Por ejemplo, α' se lee como "alfa prima".

Los ángulos correspondientes de dos triángulos semejantes son iguales entre sí. Por ello, para estos dos triángulos se cumple que:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$
$$\gamma = \gamma'$$

Los ángulos α y α', β y β', γ y γ' son iguales entre sí. Por otra parte, los lados correspondientes de los triángulos son también proporcionales entre sí.

Al dividir cualquier lado del primer triángulo entre su lado correspondiente del segundo triángulo, siempre obtenemos el mismo resultado. Podemos expresar esto de la siguiente manera:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

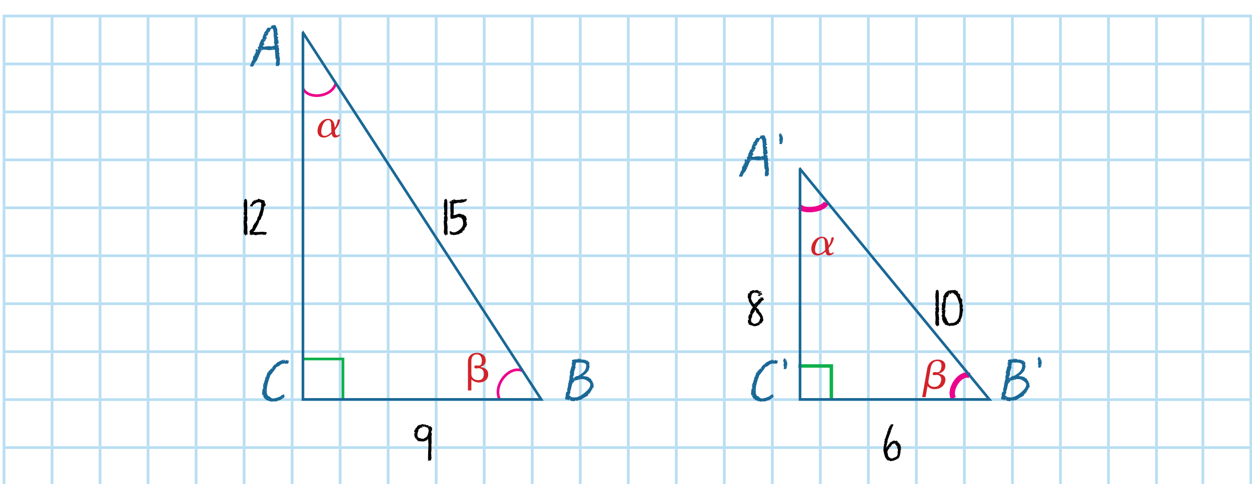
Así, podemos confirmar que efectivamente los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales. En este caso, r representa la **razón de semejanza**.

Por este motivo, si el lado de un triángulo aumenta su longitud, los otros dos lados de ese mismo triángulo también aumentarán en la misma proporción o **razón**.

Recuerda que a la división de dos números también se le conoce con el nombre de **razón**. Es decir, podemos expresar una división en forma de fracción. Por ejemplo $4 \div 3 = \frac{4}{3}$.

En la siguiente imagen tenemos dos **triángulos semejantes**.

Ejemplo 1:



Si dividimos cada lado del primer triángulo por su respectivo lado correspondiente del segundo, se obtiene el mismo número:

Es decir:

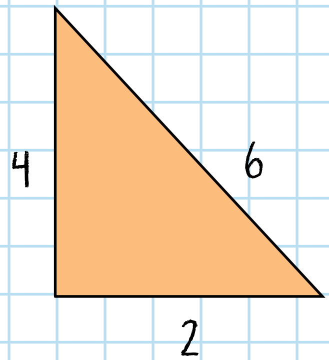
$$12 \div 8 = 1.5$$
$$15 \div 10 = 1.5$$
$$9 \div 6 = 1.5$$

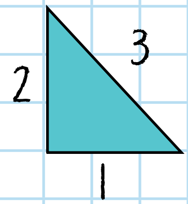
$$\frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{9}{6} = 1.5$$

En este caso, la **razón** entre los triángulos indica que el de la izquierda es 1.5 veces más grande que el de la derecha. Esto significa que podemos convertir el triángulo pequeño en triángulo grande multiplicando cada uno de sus lados por 1.5. La razón de semejanza funciona de la siguiente manera:

- Si la razón de semejanza es mayor que 1, estás agrandando una figura, como en el ejemplo anterior, donde se obtuvo 1.5.
- Si es menor que 1, estás reduciéndola de tamaño.
- Si la razón de semejanza es exactamente 1, las figuras son iguales.

Ejemplo 1:





$$2 \div 1 = 2$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$6 \div 3 = 2$$

Es decir:

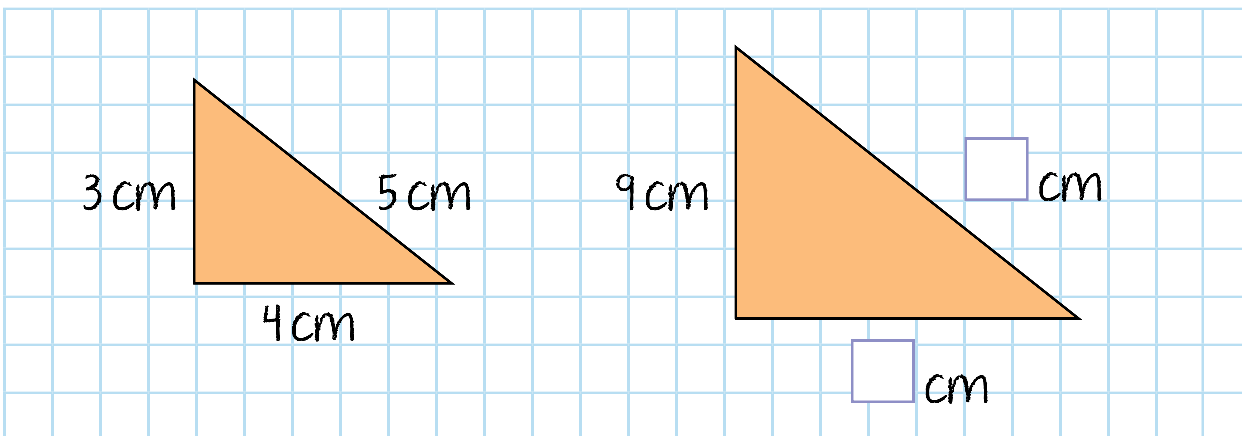
$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

La proporcionalidad es mayor a 1, así que podríamos saber que el primer triángulo es mayor incluso sin las imágenes.

Como 1.5 es mayor que 1, significa que se realizó una ampliación. Es decir, el segundo triángulo es la figura original y el primer triángulo es el resultado de aumentarlo de tamaño.

Si sabemos que dos triángulos son semejantes, habrá casos en los que podamos encontrar sus medidas faltantes. Para simplificar el proceso, recomendamos siempre empezar con los datos de la figura más grande.

Ejemplo 2:



Como sabemos que los triángulos son semejantes, se cumple que:

$$\frac{9}{3} = \frac{\square}{5} = \frac{\square}{4} = 3$$

Debido a que tenemos la medida de dos lados correspondientes (3 y 9), sabemos que la razón de semejanza es igual a 3. Esto quiere decir que el primer triángulo es el resultado de reducir el segundo triángulo a un tercio de su tamaño original. O, visto de otra manera, esto significa que el triángulo de la derecha es tres veces más grande que el de la izquierda.

Para encontrar la longitud de los lados faltantes, podemos utilizar la razón de semejanza. Tendremos que usar por separado la proporción entre cada par de lados correspondientes:

$$\frac{\square}{5} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\square}{4} = 3$$

Realizaremos el procedimiento solo para una de las dos proporciones, ya que no cambia para la otra.

En este caso, podemos simplemente despejar el denominador. Como está dividiendo, pasa multiplicando.

$$\frac{\square}{5} = 3 \quad \Rightarrow \quad \square = (3)(5)$$

Por lo tanto, el resultado es 15.

En algunas ocasiones, tendrás que usar una regla de tres para encontrar la longitud faltante. Para facilitar esto, debemos reescribir la proporción. Como todo número entero puede escribirse como una fracción, entonces $3 = \frac{3}{1}$.

Por lo tanto, $\frac{\square}{5} = 3$ se puede reescribir como:

$$\frac{\square}{5} = \frac{3}{1}$$

Ya que completes las dos fracciones, será más fácil aplicar una regla de tres. Recuerda que para calcular el valor faltante, se multiplica en diagonal y se divide entre el número restante:

$$\frac{\square}{5} \overset{\times}{=} \frac{3}{1} \; \div$$

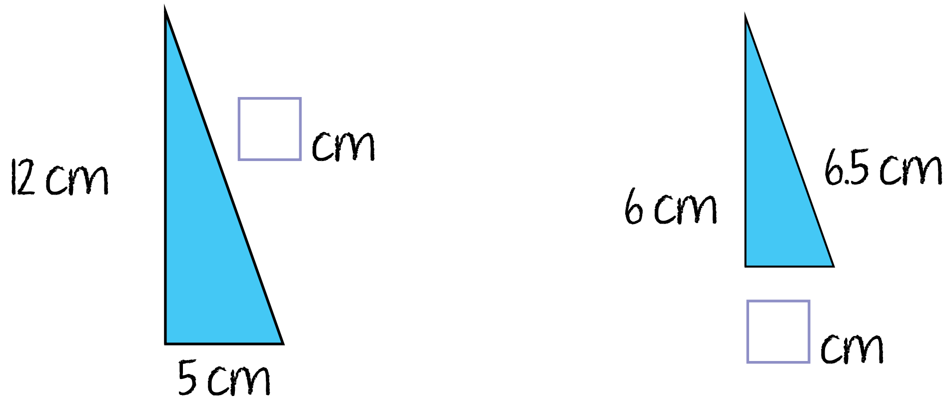
Así:

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 \div 1 = 15$$

Actividad 2. Practica lo que aprendiste.

a) Subraya la respuesta que incluya las dos medidas faltantes de los siguientes triángulos semejantes.

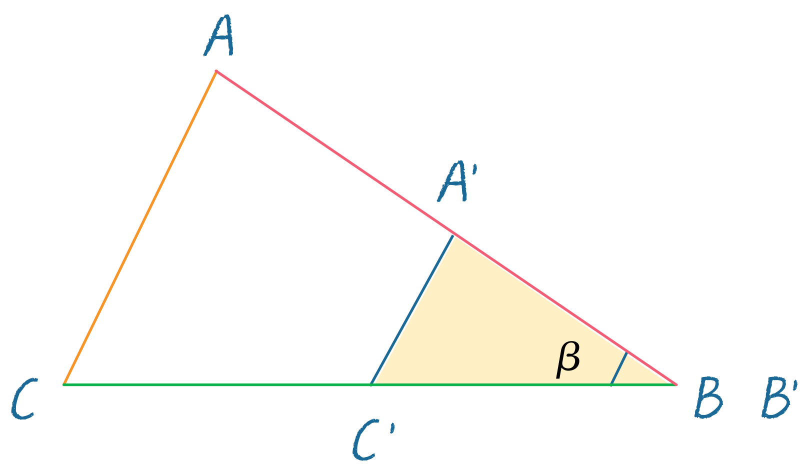


- 11 y 3
- 13 y 2.5
- 12 y 2

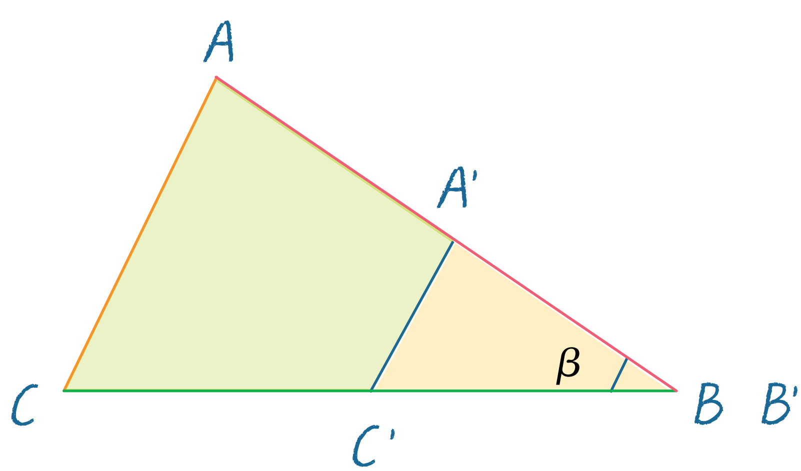
b) Calcula la longitud de los lados faltantes y anótalos en los recuadros. Haz tus operaciones en la cuadrícula.

Tema 3. Construcción de dos triángulos semejantes

Si tienes un triángulo y quieres dibujar otro que le sea semejante, puedes hacerlo trazando el nuevo triángulo dentro del original. Para ello, primero debes elegir uno de los lados del triángulo inicial, por ejemplo el lado ***AC***. Después, dibuja una línea paralela al mismo. En este caso, dibujamos la línea ***A'C'***.



De esta forma se obtienen dos triángulos con todos sus ángulos iguales (esto significa que tienen la misma forma). En otras palabras, los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes entre sí. Nota que el nuevo triángulo es una reducción del original.

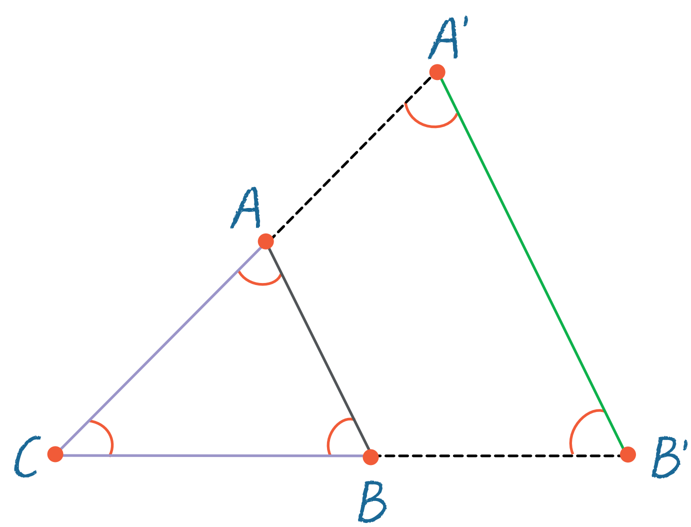


Este procedimiento ejemplifica el **teorema de Tales de Mileto** sobre la semejanza de triángulos.

Dicho teorema dice que cada vez que dibujamos una línea paralela a uno de los lados de un triángulo, podemos formar otro triángulo semejante. El nuevo triángulo que formamos puede estar dentro del triángulo original o puede estar fuera. Si el nuevo triángulo está dentro, es una reducción del triángulo original y si está fuera, es una ampliación.

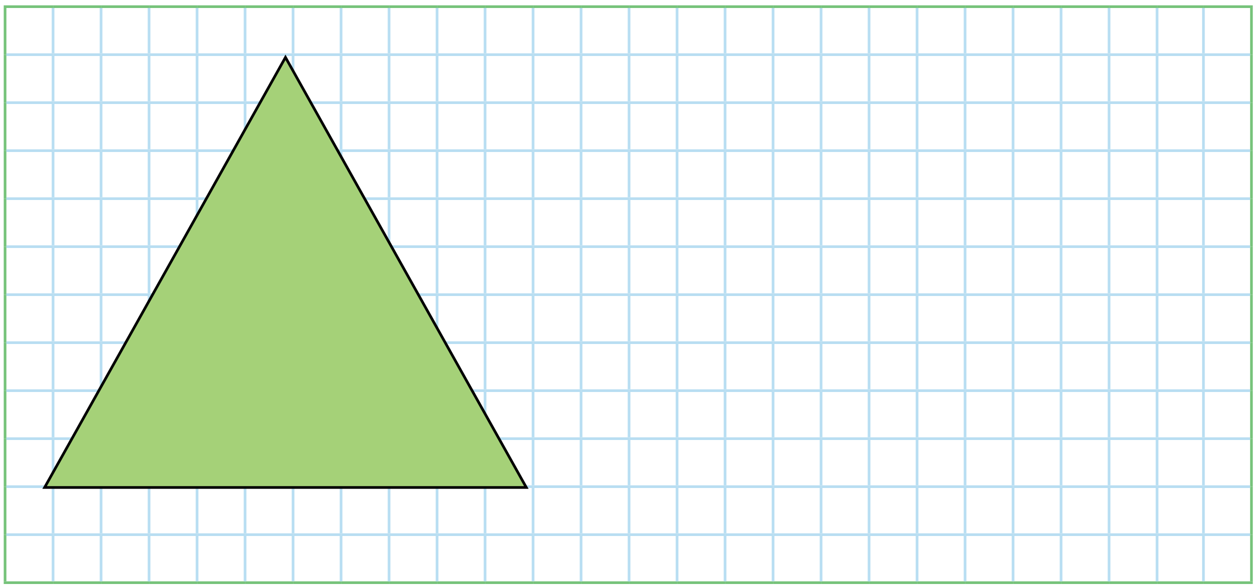
En el ejemplo anterior ya mostramos cómo hacer una reducción. Para hacer una ampliación, la línea paralela que tracemos debe estar fuera del triángulo original. Después solo hace falta prolongar los otros dos lados del triángulo inicial hasta formar uno nuevo.

En la imagen, las rectas ***AB*** y ***A'B'*** son paralelas entre sí. Los otros dos lados del triángulo grande se forman prolongando los lados *CA* y *CB* del triángulo inicial. El resultado son dos triángulos semejantes. En este caso se está realizando una ampliación, pues el triángulo *A'B'C* es más grande que el triángulo original *ABC*.

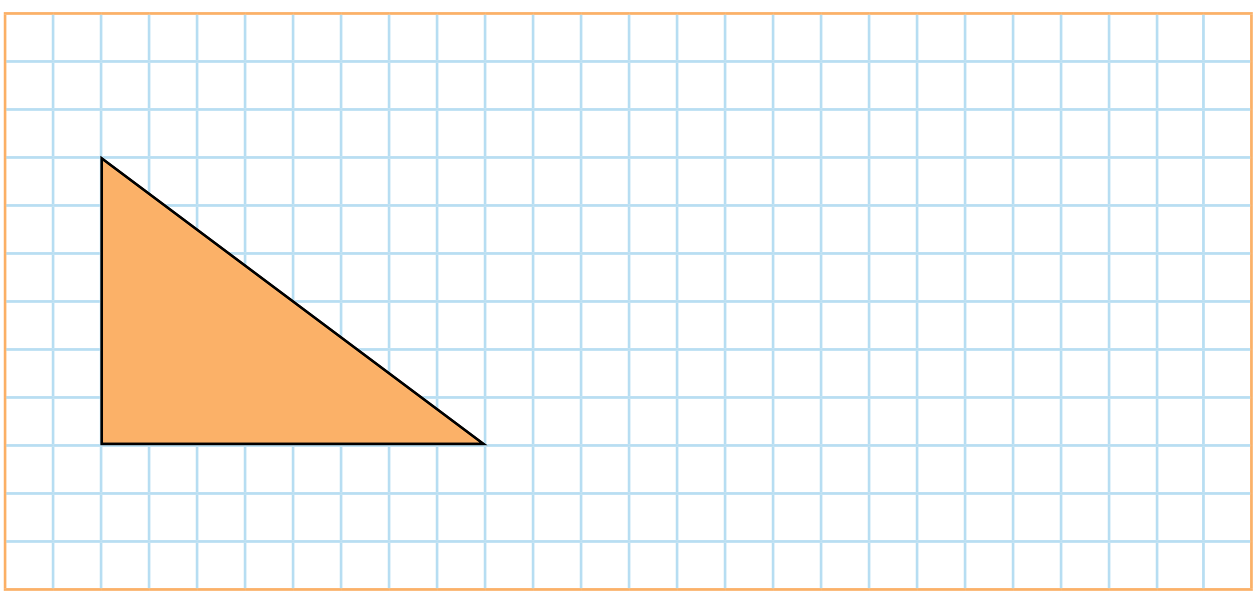


Actividad 3. Dibuja triángulos semejantes a los siguientes, de acuerdo con lo que se te pide.

1. Dibuja una reducción.



2. Dibuja una ampliación.



Tema 4. Problemas cotidianos que se resuelven con la semejanza de triángulos

En ciertas ocasiones es imposible medir directamente algunos objetos. Hay distancias y alturas que no se pueden determinar con instrumentos de medición simples como una regla o una cinta métrica.

Cuando las herramientas fallan o son insuficientes, recae en el ingenio humano la tarea de resolver estos problemas. Es así como terminamos usando las **propiedades de los triángulos semejantes** para realizar mediciones pues, aunque no se note a simple vista, los triángulos están por todos lados.

Lee un ejemplo de cómo el filósofo griego **Tales de Mileto** (624-546 a. de C.) resolvió un problema con el uso de triángulos semejantes hace mucho tiempo. Fue uno de los primeros filósofos que trataron de encontrar explicaciones distintas a los mitos y leyendas para describir el mundo y su funcionamiento. Por eso se le considera precursor de la ciencia moderna.

Lee en voz alta

Comparte la lectura

REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA ▪ LA MATEMÁTICA ▪

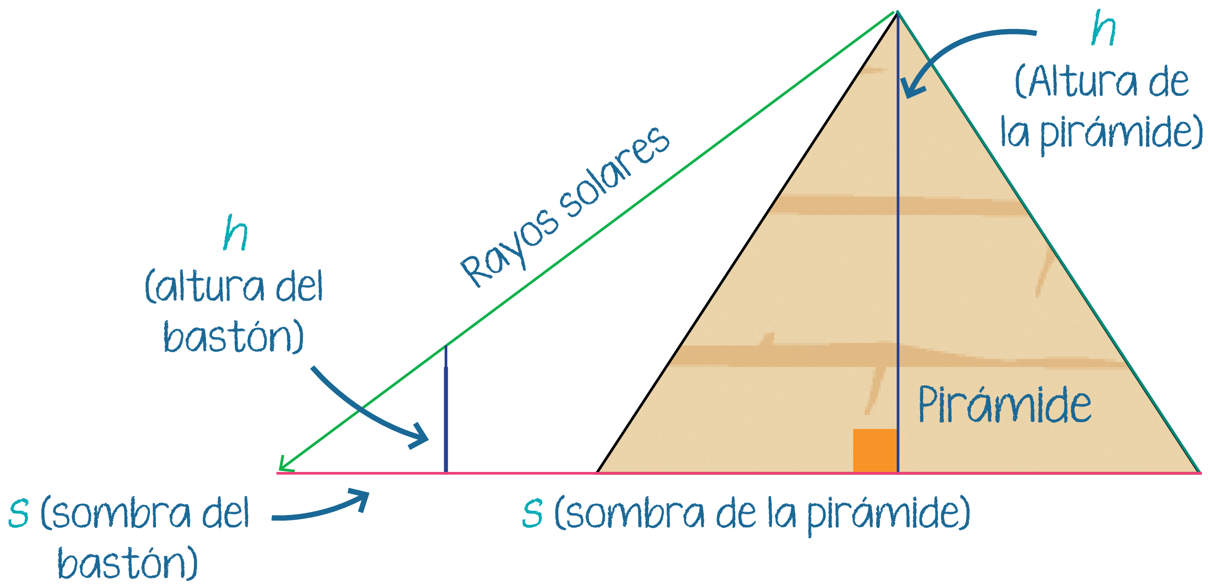
Teorema de Tales de Mileto

Entre sus intereses, destaca el estudio de la geometría, de ahí que se le atribuya el teorema que lleva su nombre. Este teorema no debe confundirse con el de Pitágoras, que se verá en la secuencia siguiente.

Se dice que un sacerdote egipcio le pidió a Tales de Mileto calcular la altura de la pirámide del rey Khufu, también conocida como pirámide de Keops.

Tales de Mileto clavó su bastón de forma perpendicular al suelo y esperó hasta que la altura de la sombra que proyectaba fuera igual a la altura del bastón. En ese momento midió la longitud de la sombra de la pirámide.

Lo que hizo **Tales de Mileto** para medir la altura de la pirámide de Keops se ilustra en la siguiente imagen:



Como puedes ver, Tales de Mileto formó dos triángulos semejantes utilizando el bastón, la altura de la pirámide y sus sombras.

Recuerda que los lados correspondientes de dos **triángulos semejantes** son proporcionales entre sí. Con base en esto, para el problema de la pirámide se cumple que:

$$\frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Altura del bastón}} = \frac{\text{Sombra de la pirámide}}{\text{Sombra del bastón}}$$

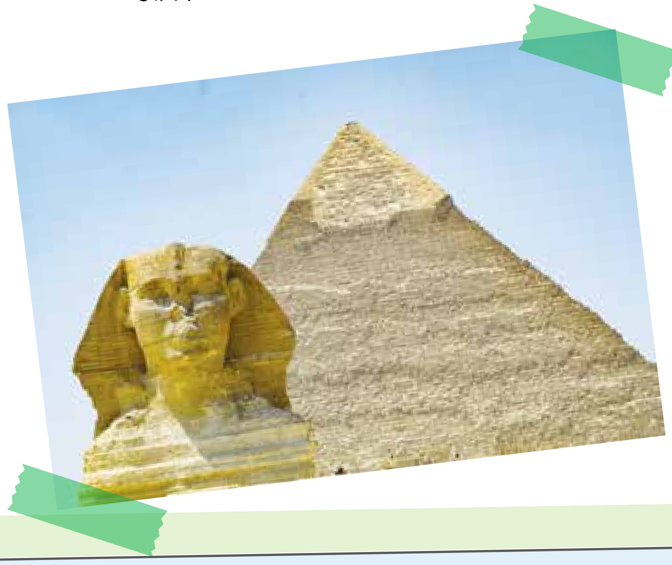
Si a una determinada hora del día la sombra de la pirámide es de 296.45 m de largo, la sombra del bastón es de 3.14 m de longitud y se sabe que la altura del bastón es de 1.45 m, se tiene que:

$$\frac{\text{Altura de la pirámide}}{1.45\text{ m}} = \frac{296.45\text{ m}}{3.14\text{ m}}$$

Aplicando una **regla de tres** o despejando la incógnita (altura de la pirámide) se obtiene lo siguiente:

$$\text{Altura de la pirámide} = \left(\frac{296.45\text{ m}}{3.14\text{ m}}\right)(1.45\text{ m}) = 136.89\text{ m}$$

De esta forma, Tales de Mileto pudo determinar que la altura de la pirámide de Keops es de 136.89 m, sin necesidad de medir directamente la pirámide.



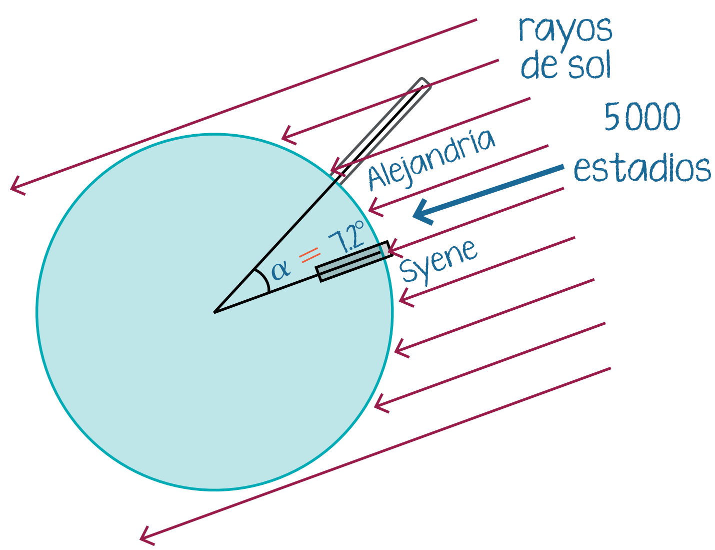
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA ■ LA MATEMÁTICA ■

¿La Tierra es redonda?

Así como Tales de Mileto desarrolló un método para calcular la altura de la pirámide de Keops, otras personas en Grecia también hicieron cálculos acertados con la medición de ángulos. Como el filósofo griego Eratóstenes (276 a. de C. a 194 a. de C.), quien dedujo que la Tierra es redonda.

Cuando era director de la Biblioteca de Alejandría, leyó que en la frontera de Syene, al sur de Alejandría, el 21 de junio (solsticio de verano, cuando la Tierra se encuentra más alejada del Sol) las sombras de las columnas de un templo o un bastón clavado en el suelo se hacían más pequeñas cuando el mediodía se acercaba.

Y cuando eran las 12 del día y el sol llegaba a su punto más alto en el cielo, o cenit, en Syene desaparecían las sombras y el sol brillaba directamente sobre el agua de un pozo profundo. De lo anterior se preguntó si en Alejandría, el 21 de junio, las columnas darían sombra y el sol podría verse en el fondo de los pozos.



LA MATEMÁTICA ■ REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

Al comprobar que en Syene a las 12 del día no había sombra y en Alejandría sí, dedujo que los rayos llegaban de forma ligeramente transversal en Alejandría porque **la Tierra es redonda**.

CÓDIGO COMÚN

Estadio: medida utilizada en Grecia y Roma de la antigüedad, que equivale aproximadamente a 185 pasos

Ya conociendo esto, pudo determinar aproximadamente el tamaño del planeta. Para ello, contrató a una persona que midiera la distancia de Alejandría a Syene, que resultó ser de 5 000 **estadios**.

Para calcular la medida del ángulo clavó un palo en el suelo y esperó para ver la sombra al mediodía; conociendo la altura del palo y la longitud de la sombra proyectada, dedujo que el ángulo era de 7° 12'.

TIC

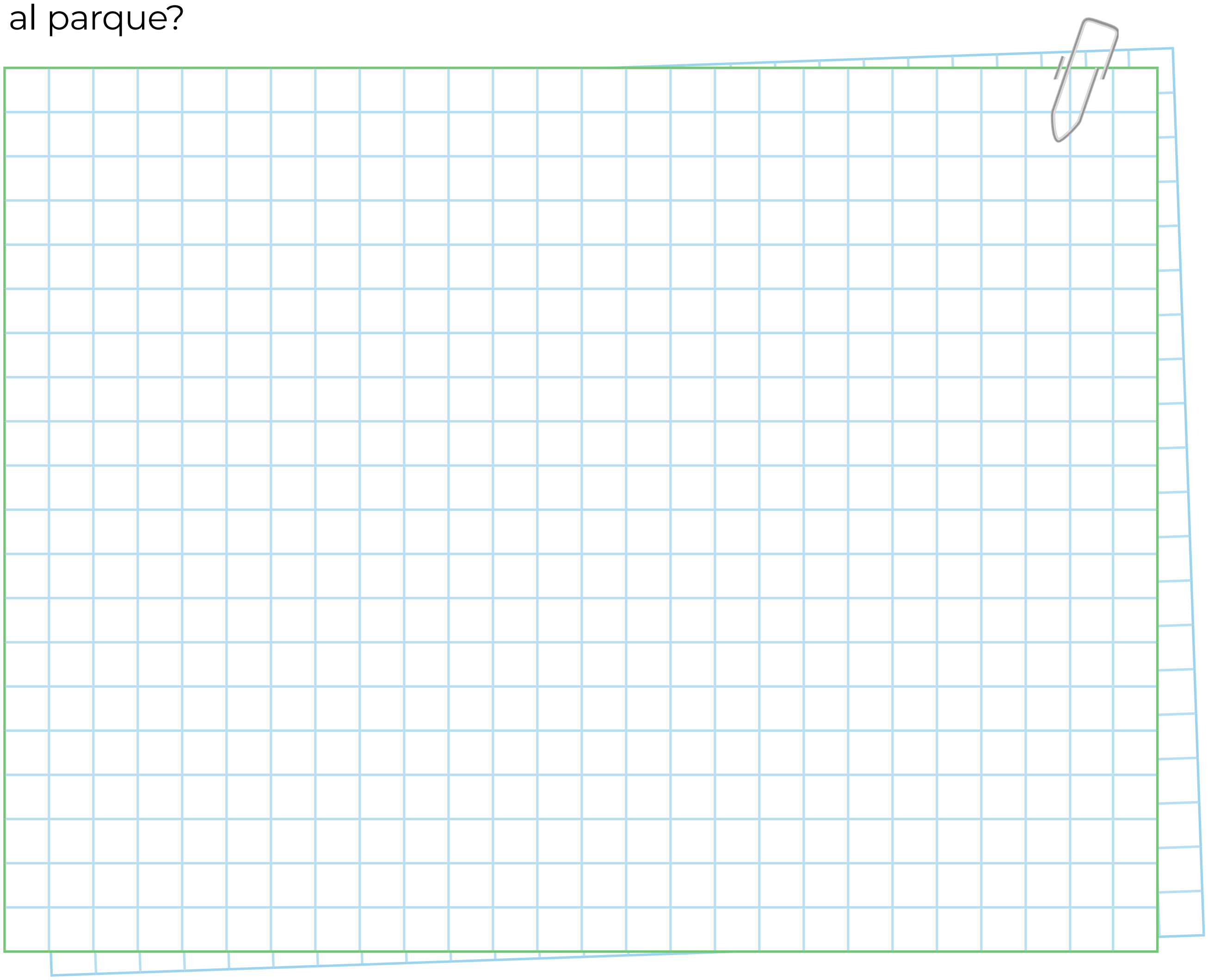
Visita en el siguiente enlace un video del programa *Cosmos*, de Carl Sagan, con la explicación del tema.
http://bit.ly/3E7BG9L

Al dividir los 360° que mide un círculo entre 7°12' (7.2°) obtuvo 50. Multiplicó esa cantidad por la distancia de 5 000 estadios y tuvo como resultado 250 000 estadios. Al hacer la conversión de estadios a kilómetros, se obtiene 39 500, medida muy cercana a los 40 000 km de circunferencia de la Tierra.

Fuentes: Sagan, Carl, "Eratóstenes y la circunferencia de la Tierra", *Cosmos*, disponible en: http://bit.ly/3E7BG9L (Consulta: 26 de octubre de 2022).
Martín de Diego, David y Timón, Ágata, "Eratóstenes: midiendo lo imposible", Ciencia, Matemáticas, en *OpenMind BBVA*, 31 de mayo de 2018. Disponible en http://bit.ly/3WAiQiF (Consulta: 25 de octubre de 2022).

Actividad 4. Resuelve los siguientes problemas utilizando las propiedades de los triángulos semejantes. Dibuja todas las figuras que necesites.

1. Carmen consiguió una foto satelital de su casa y lo que hay a sus alrededores. Se dio cuenta de que se forma un triángulo con las distancias de su casa al parque (3.5 cm), de su casa al supermercado (6 cm) y del supermercado al parque (4 cm). Si Carmen sabe que la distancia real de su casa al supermercado es de 240 m, ¿cuál es la distancia real de su casa al parque?



2. Con los mismos datos, Carmen calcula ahora la distancia real del supermercado al parque.

3. Durante un experimento, Marcia y Jorge descubren que una regla de madera de un metro de largo, colocada perpendicularmente al suelo, produce una sombra de 40 cm de longitud. Si Jorge mide 1.75 m, ¿cuánto mide su sombra?

4. Marcia y Jorge quieren medir ahora la altura de un árbol que está cerca de la regla de madera que produce la sombra de 40 cm de longitud. Si la sombra del árbol mide 1.6 m desde su tronco, ¿cuánto mide su altura?

PROYECTO

Una representación gráfica ayuda a comunicar de forma clara alguna idea o información, como parte del razonamiento matemático.

Elabora una maqueta que represente cómo quedará el espacio ya rehabilitado o recuperado.

a) Mide el perímetro y el área del espacio a rehabilitar. Si es demasiado grande, selecciona una porción rectangular o cuadrangular y trabaja sobre ella. Recuerda utilizar las unidades de medida adecuadas.

Perímetro: ____________________

Área: ____________________

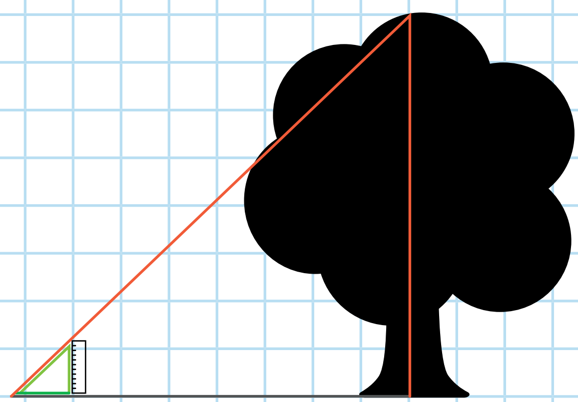
CONEXIONES

Repasa las unidades de medición en la secuencia 5 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 3.*

b) Ubica elementos como postes, árboles, porterías, tableros para jugar basquetbol o cualquier elemento que sea alto y cueste trabajo medirlo directamente. Calcula su altura aplicando el teorema de Tales de Mileto. Considera que es necesario que sea en un día soleado.

Para ello, realiza los pasos siguientes:

1. Como vas a hacer una maqueta, utiliza una regla de 10 cm en lugar del bastón que usó Tales de Mileto.
2. Colócala de forma que su sombra coincida con el final de la sombra del objeto que estés midiendo. Por ejemplo, del árbol, como en la siguiente imagen.



3. Ya tienes dos triángulos semejantes. La línea gris es la medida de la sombra del árbol, mientras que la línea verde oscuro es la medida de la sombra de la regla.
4. Mide las dos sombras.

5. Ahora formula la razón que permita calcular la medida faltante:

$$\frac{\text{Altura del árbol}}{\text{Altura de la regla}} = \frac{\text{Sombra del árbol}}{\text{Sombra de la regla}}$$

6. Reemplaza en la razón los valores que conoces, que en este caso son la altura de la regla (10 cm), la sombra de la regla y la sombra del árbol, y con el método de la regla de tres calcula la altura del árbol:

$$\frac{x}{\text{Altura de la regla}} = \frac{\text{Sombra del árbol}}{\text{Sombra de la regla}}$$

Obtuviste la altura real del árbol. Realiza este proceso otras dos veces con otros dos objetos.

a) Usa el recuadro siguiente para hacer dibujos que te ayuden a plantear el problema, hacer las operaciones y llegar a la solución. En tu libreta calcula al menos tres objetos altos que vas a representar en tu maqueta. Agrega, además del dibujo, agrega el nombre del objeto dibujado que se midió: poste, portería, árbol.

Dibujo de la aplicación del teorema de Tales de Mileto

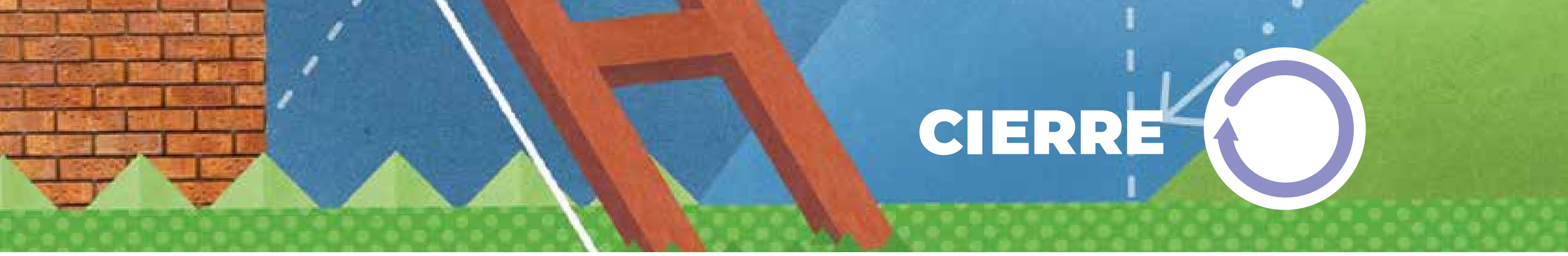
Operaciones

Altura del objeto:

b) Selecciona uno de los tres objetos y escribe sus datos en el recuadro. Inclúyelo en tu maqueta con el tamaño de 10 cm y tómalo como base para hacer los otros elementos en una medida proporcional. Por ejemplo, si es el árbol, medirá 10 cm; si tienes que agregar una banca, hazla en el tamaño que corresponda proporcionalmente.

c) Utiliza un cartón grueso y elabora la maqueta con ayuda de tu familia, amistades y otros participantes en el proyecto.

d) No necesitas comprar material especial para hacerla, puedes utilizar un trozo de cartón, plastilina, papel maché o cualquier material que tengas a la mano. Una vez terminada, guárdala en un lugar seguro porque la utilizarás en otra secuencia.



En esta secuencia has aprendido a identificar triángulos semejantes, las relaciones de proporcionalidad entre sus lados y cómo resolver problemas con estas figuras geométricas.

Actividad de cierre. Marca con una paloma ✓ si la frase es verdadera (V) o falsa (F).

Frases	V	F
Todos los triángulos congruentes son también triángulos semejantes.		
La regla de tres se puede utilizar para calcular la medida de los lados faltantes en la semejanza de triángulos.		
Los triángulos congruentes tienen ángulos iguales, pero sus lados pueden ser distintos.		
Todos los triángulos semejantes son también triángulos congruentes.		
Se puede construir un triángulo semejante a otro con solo una regla y un lápiz.		
Los triángulos semejantes tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.		

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Enlisté las actividades a realizar para rehabilitar el lugar.	
Medí las alturas de los principales elementos del lugar.	
Elaboré una maqueta del espacio a rehabilitar.	

Secuencia

7

El teorema de Pitágoras

En la secuencia se aborda la aplicación del teorema de Pitágoras; para ello, conocerás quién fue este filósofo griego y por qué su estudio de los triángulos se sigue utilizando en la actualidad. Conocerás el teorema que lleva su nombre y aprenderás a emplearlo para calcular el valor faltante de uno de los lados de un triángulo rectángulo.

PROYECTO

Continuarás también con el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia*, con las actividades siguientes:

- Organización para rehabilitar el espacio.
- Elaboración del formato para la distribución de las tareas y la revisión de avances.

Recuerda que usamos el ícono **PROYECTO** para diferenciar las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Retoma tus aprendizajes previos y contesta lo que se te pide.

1. Menciona tres diferentes tipos de triángulos.

2. ¿Cómo se les llama a los triángulos con tres lados iguales?

3. Menciona tres tipos de ángulos.

4. ¿Cuánto mide un ángulo recto?

5. ¿Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo?

Tema 1. Pitágoras

Pitágoras (570-490 **a. de C.**) fue un filósofo y matemático nacido en la isla de Samos en la antigua Grecia. Se le considera uno de los primeros matemáticos y **geómetras** de la humanidad. Pitágoras mostró un interés especial en el estudio de los triángulos.

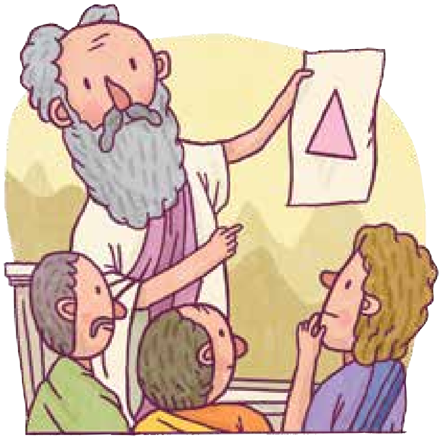
Poco se conoce de los primeros años de vida de Pitágoras. Sin embargo, se sabe que solía viajar mucho y pudo estudiar matemáticas y astronomía en lugares como el antiguo Egipto, donde se enfocó en el triángulo rectángulo. Fundó una escuela filosófica y a sus estudiantes se les conocía como los **pitagóricos**.

CÓDIGO COMÚN

a. de C.: quiere decir que Pitágoras nació antes de Cristo, como en una recta numérica, los años van de más a menos hasta llegar al 0 y después de menos a más.

Geómetra: persona que estudia la geometría.

Si bien la escuela de **Pitágoras** era de naturaleza religiosa, también se dedicó al estudio de las matemáticas como fundamento de sus principios de vida.



Los **pitagóricos** vivían de acuerdo con las reglas de comportamiento que Pitágoras les enseñó, que incluían desde la forma de vestir hasta lo que tenían que comer.

Todos trabajaban en comunidad, donde estudiaban, realizaban descubrimientos matemáticos y planteaban teorías.

Pitágoras creía que todas las cosas eran números con personalidad, características, debilidades y fortalezas. Creía que el mundo físico podía entenderse a través de las matemáticas y que esta ciencia era la base de todo.

Para Pitágoras, la geometría era la forma más elevada de entre todos los estudios matemáticos y le daba un significado místico a ciertos símbolos.

Aunque no se tiene ningún escrito suyo, se le atribuyen las siguientes aportaciones científicas:

- Descubrir que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- El teorema de Pitágoras.
- La creación del álgebra geométrica.

El descubrimiento de los números irracionales creó gran conmoción entre los pitagóricos porque, para ellos, los números significaban la razón (división) de dos números enteros. Es decir, ellos creían que solo existían los **números racionales**.

CONEXIONES

Revisa la secuencia 1 de la unidad 1 del módulo *Pensamiento matemático 3* para recordar los numeros irracionales.

Recuerda que el número irracional más famoso es **Pi** (π), el cual es aproximadamente igual a **3.1416**.

Actividad 1. Relaciona con una línea la palabra con su descripción.

Ocupación de Pitágoras.	Pitagóricos
Rama de las matemáticas que inició con los estudios de Pitágoras.	Números
Tipo de números descubiertos por Pitágoras.	Filósofo
Uno de los temas de estudio de Pitágoras.	Irracionales
Nombre que se le daba a los discípulos de Pitágoras.	Geometría

Tema 2. Validación del teorema

CÓDIGO COMÚN

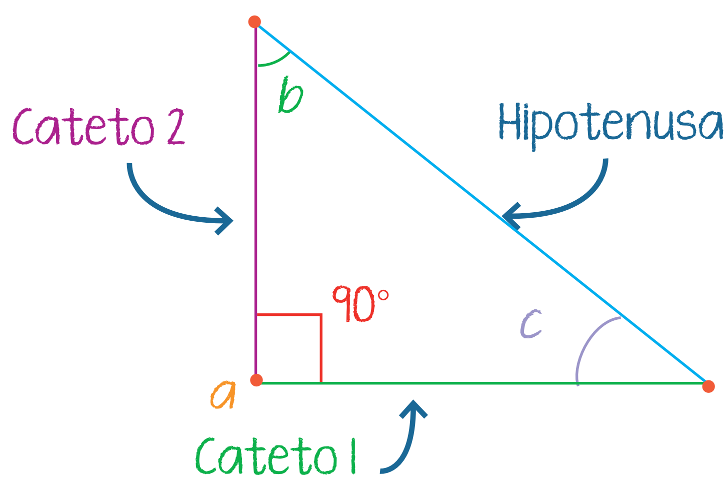
Validar: declarar algo como correcto.

Babilonios: habitantes de Babilonia, un reino de la antigüedad famoso por su comercio y cultura.

Pitágoras es conocido mundialmente gracias al teorema que lleva su nombre. **Un teorema es una afirmación** que, para ser **validada**, requiere ser demostrada mediante el uso de operaciones y argumentos matemáticos comúnmente aceptados.

Se sabe hoy en día que los egipcios y los **babilonios** conocían los principios que desarrolla el teorema de Pitágoras, pero fue el filósofo griego quien más estudió los triángulos rectángulos, demostró su teorema y lo dio a conocer de forma generalizada, de ahí que lleve su nombre.

El **teorema de Pitágoras** relaciona matemáticamente las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo.



Los lados de un triángulo rectángulo tienen nombres especiales. La **hipotenusa** se caracteriza por ser siempre el lado más grande y está ubicada enfrente del ángulo recto. Los **catetos** son los lados que forman el ángulo recto; sin importar su longitud, siempre son menores que la hipotenusa.

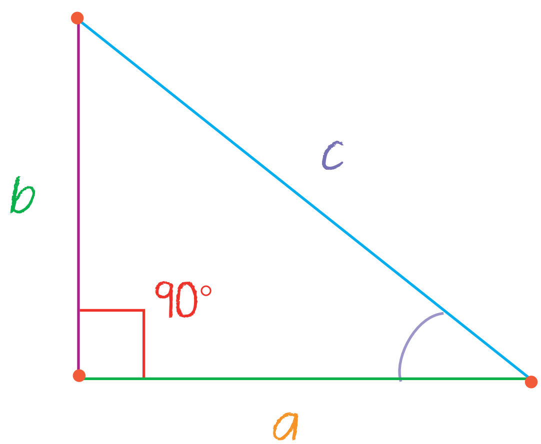
Teorema de Pitágoras
"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."

Este teorema solo aplica para triángulos rectángulos. Una forma fácil de recordar esto es que solo los triángulos rectángulos tienen catetos e hipotenusa.

Si se le llama c a la hipotenusa y a y b a los catetos, el **teorema de Pitágoras** puede escribirse de cualquiera de estas formas (ambas son equivalentes):

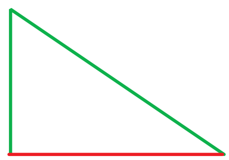
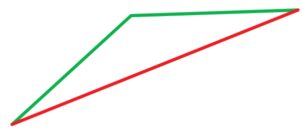
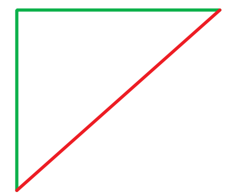
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

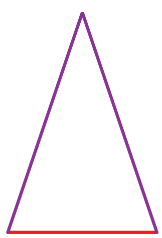
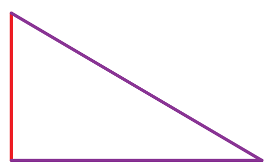
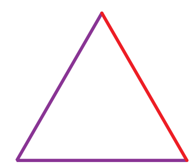


Actividad 3. Encierra en un círculo ◯ la imagen que muestra con una línea roja lo que se solicita en cada caso.

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo.

2. Un cateto de un triángulo rectángulo.

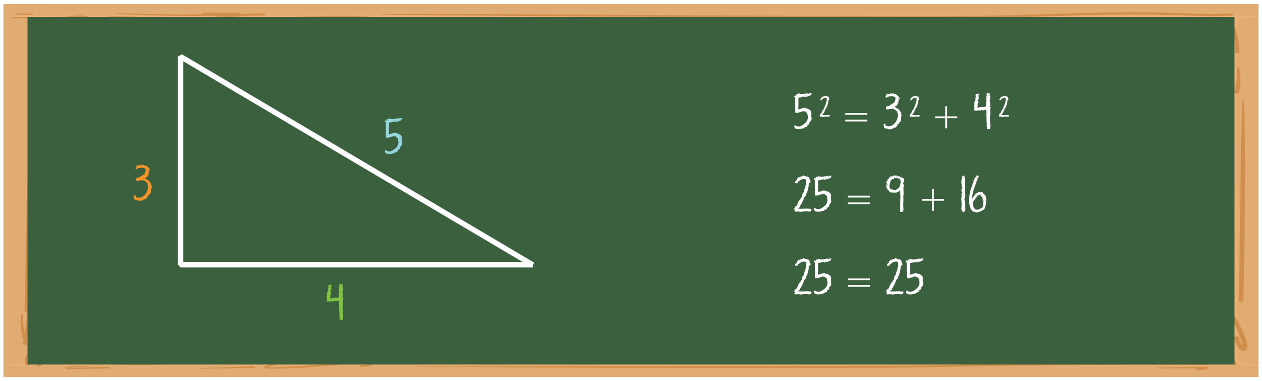
3. La fórmula del teorema de Pitágoras cuando a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

$a^2 - b^2 = c^2$ $\qquad$ $2a + 2b = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$

4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo en la fórmula del teorema de Pitágoras.

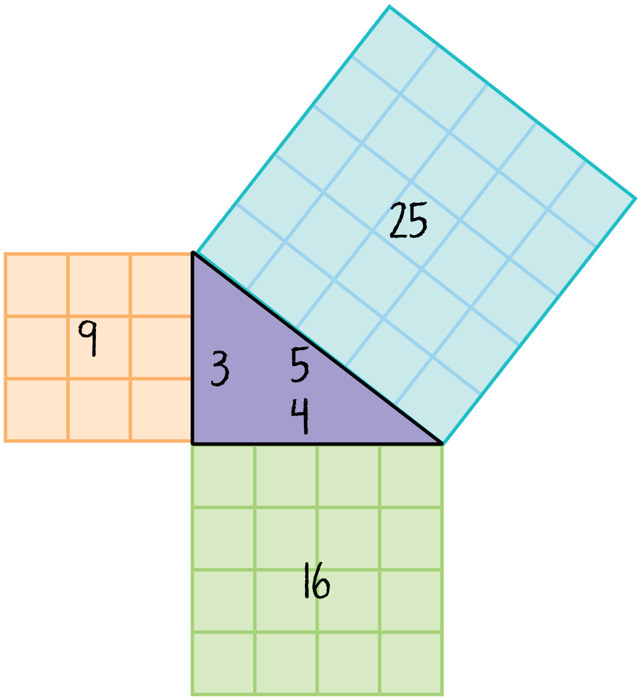
$a^2 - b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$

Tema 3. Demostración gráfica del teorema de Pitágoras



El teorema de Pitágoras se conoce desde los tiempos antiguos. De hecho, hay un **triángulo rectángulo** muy especial desde hace miles de años: aquel cuyos catetos miden 3 y 4 unidades y cuya hipotenusa mide 5 unidades.

La representación gráfica de **elevar al cuadrado** el valor de cada cateto y de la hipotenusa se muestra a continuación:



TIC

Observa en este enlace un video sobre esta demostración gráfica:
https://www.youtube.com/watch?v=ZUMr-DwLih8

La medida de cada cateto y de la hipotenusa del triángulo rectángulo se representan con un cuadrado formado por la cantidad de cuadritos que corresponden con la medida de cada lado.

Elevar al cuadrado la medida de cada lado se representa con un cuadrado que mide 3×3 (igual a 9 cuadrados) y 4×4 (igual a 16 cuadrados) para los catetos. Para la hipotenusa se genera un cuadrado de 5×5 (igual a 25 cuadrados):

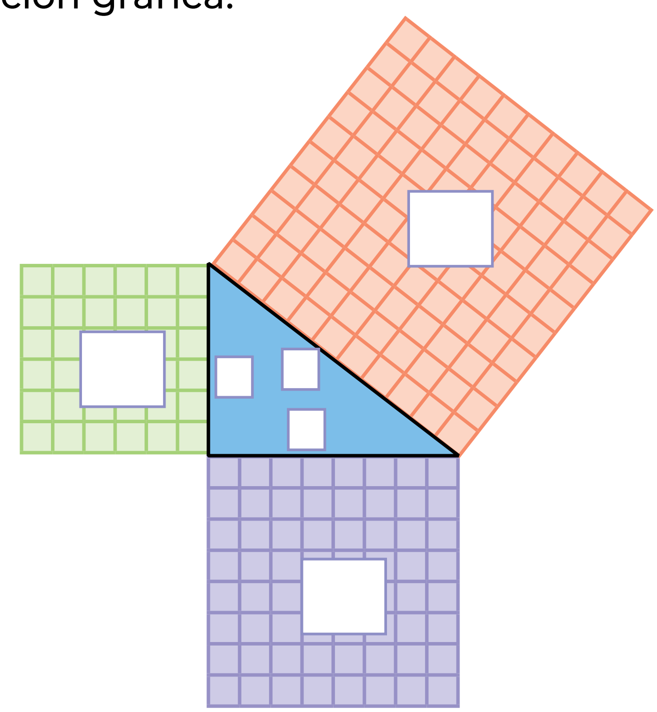
Con esto se demuestra el teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$ o $a^2 + b^2 = c^2$

$9 + 16 = 25$
$25 = 25$

La **comprobación gráfica del teorema de Pitágoras** es conocida desde hace miles de años, muestra de manera directa y sencilla la veracidad del teorema, es decir, que es verdadero.

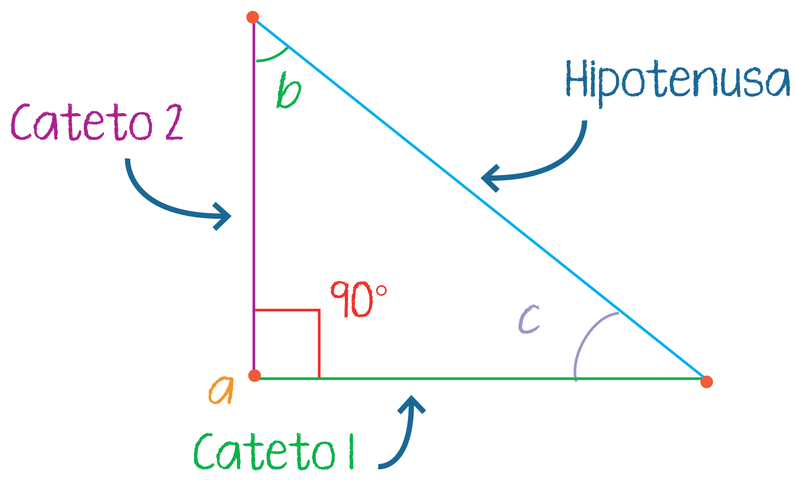
Actividad 3. Escribe en cada espacio el número que corresponda en la demostración gráfica.



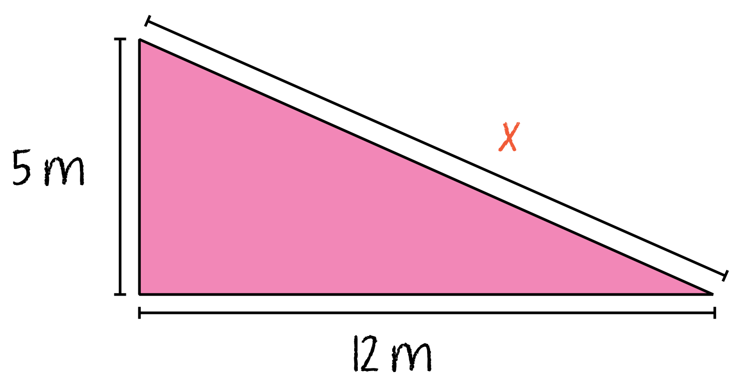
Tema 4. Uso del teorema de Pitágoras en la solución de problemas

Hay varias situaciones que tienen que ver con un triángulo rectángulo; si se necesita encontrar el valor de alguno de sus tres lados, el **teorema de Pitágoras** es de gran ayuda, pues al aplicarlo podemos encontrar la longitud de uno de sus lados cuando se conoce la de los otros dos.

Para utilizarlo, primero se identifica la hipotenusa y los catetos.



Del siguiente **triángulo rectángulo** se desconoce el valor del lado x.



Para calcular la medida de X basta con aplicar el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

CONEXIONES

Observa que el teorema de Pitágoras es una ecuación. Revisa cómo resolver una ecuación con una incógnita en la secuencia 1 de la unidad 1 de este módulo.

Revisa el tema de potencias y raíz cuadrada en la secuencia 4 de la unidad 1 del *módulo Pensamiento matemático 3.*

Solo que en este caso la hipotenusa recibe el nombre de X, mientras que los catetos siguen llamándose a y b.

$$c = X$$
$$a = 5$$
$$b = 12$$

Si sustituimos los valores, obtenemos lo siguiente.

$$X^2 = 5^2 + 12^2$$

Para conocer el valor de la X se necesita quitarle el exponente. Para hacerlo, se le saca la raíz cuadrada a los dos lados del teorema. Recuerda que una ecuación es como una balanza, si haces algo de un lado, debes hacerlo también del otro.

$$\sqrt{X^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

Como la raíz cuadrada de X^2 es igual a X, el teorema queda:

$$X = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

Al hacer las operaciones, se tiene que:

$$x = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$x = \sqrt{144 + 25}$$

$$x = \sqrt{169}$$

$$x = 13$$

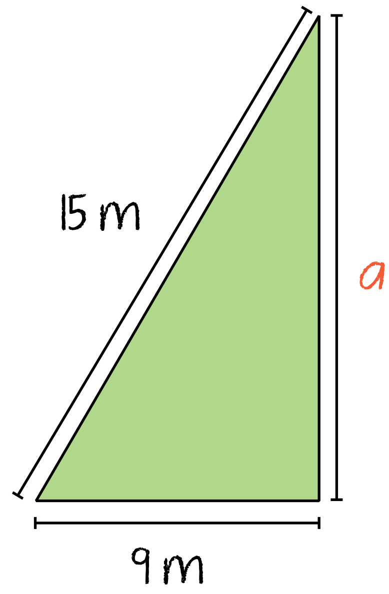
Recuerda la regla de la jerarquía de las operaciones: en este caso, primero se resuelven las potencias porque están solas, después la suma porque ambas cantidades están dentro de la raíz cuadrada y, finalmente, se calcula la raíz cuadrada del resultado de la suma. Usa tu calculadora.

CONEXIONES

Revisa la jerarquía de las operaciones en las cuatro secuencias de la unidad 1 del módulo *Pensamiento matemático 3.*

Observa este otro ejemplo.

Dado el siguiente **triángulo rectángulo**, encontrar el valor del lado a:



Como puedes ver, el lado a del triángulo rectángulo es un cateto, mientras que el otro cateto tiene una longitud de 9 metros y la hipotenusa mide 15 metros.

En este caso, si aplicamos el teorema de Pitágoras, tenemos lo siguiente:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$c = 15$ $\quad$ $a = ?$ $\quad$ $b = 9$

Es necesario despejar la a^2 del teorema para calcularla. Para hacerlo, se le resta b^2 a cada lado del teorema, con el fin de dejarla sola, del lado derecho de la igualdad:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$c^2 - b^2 = a^2 + b^2 - b^2$$

Como $b^2 - b^2$ es igual a cero, el teorema queda:

$$c^2 - b^2 = a^2$$

La igualdad también puede escribirse así:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Ahora, se saca la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad para quitarle el exponente a la a:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Y como la raíz cuadrada de a^2 es igual a a, el teorema queda:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Se sustituyen los valores conocidos y se hacen las operaciones:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Para $c = 15$ y $b = 9$

$$a = \sqrt{15^2 - 9^2}$$

$$a = \sqrt{225 - 81}$$

$$a = \sqrt{144}$$

$$a = 12$$

Entonces, **el teorema de Pitágoras**, aunque está planteado para calcular la hipotenusa, te ayuda a encontrar también los valores de los catetos, siempre y cuando sepas despejar bien.

En resumen, si necesitas calcular la hipotenusa, usa el teorema de Pitágoras tal cual:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Si lo que necesitas es calcular uno de sus catetos, entonces tienes que despejar la fórmula, y queda así:

$$\boxed{a^2 = c^2 - b^2}$$

Recuerda que una vez que hayas sustituido los valores, el primer paso para realizar las operaciones es quitarle el exponente a la incógnita, con la operación contraria a la potencia, que es la raíz cuadrada. Esta se aplica a los dos términos de la ecuación:

$$\sqrt{a} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

En el primer término la raíz cuadrada se cancela con la potencia, lo que no sucede en el segundo porque primero se tendría que resolver la resta:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

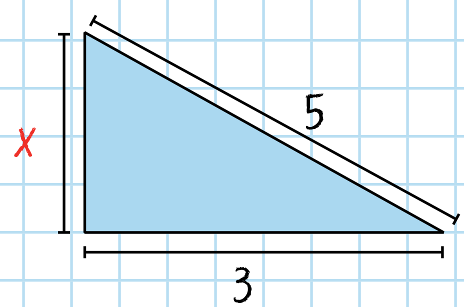
O puede ser de este modo, dependiendo del cateto que necesites calcular:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

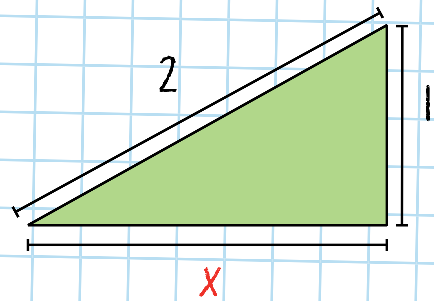
Actividad 4. Encuentra el valor de las medidas faltantes.

Operaciones:

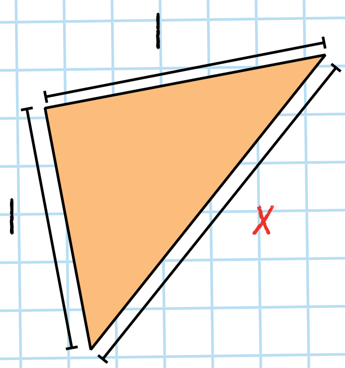


$x =$

Operaciones:



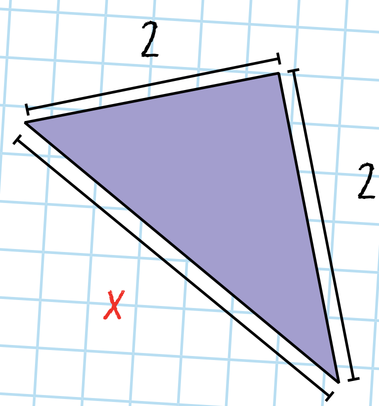
x =



Operaciones:

x =

Operaciones:



x =

PROYECTO

Ya tienes una maqueta que muestra cómo quedará el lugar rehabilitado y cuentas con fotografías de su estado actual. También tienes un listado de los materiales que se requieren para trabajar.

Junto con las personas que apoyan el proyecto, establece acuerdos para realizar las tareas de rehabilitación del espacio. Distribúyanlas por equipos de trabajo.

a) Llena el formato, fotocópialo o tómale una foto para que lo repartas entre todas las personas participantes.

Formato de actividades para rehabilitar el espacio de convivencia: ______

Equipos y miembros que los conforman	Tareas
Equipo 1	
Equipo 2	
Equipo 3	

b) Reúnanse una vez por semana para registrar y evaluar los avances, solucionar problemas con base en acuerdos y tomar decisiones.

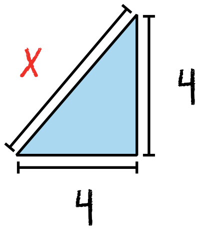
CIERRE

En esta secuencia conociste quién fue Pitágoras, en qué consiste el teorema que lleva su nombre, cómo se comprueba para calcular el valor faltante de uno de los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad de cierre. Refuerza lo aprendido y responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

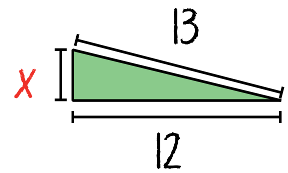
Frase	V	F
El teorema de Pitágoras solo se aplica a los triángulos rectángulos.		
La hipotenusa es el lado más largo de cualquier triángulo rectángulo.		
El teorema de Pitágoras existe desde hace más de dos mil años.		
Con el teorema de Pitágoras se pueden calcular todos los lados de un triángulo conociendo solamente uno de ellos.		
El teorema de Pitágoras solo se puede utilizar para calcular el valor de la hipotenusa.		
Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 7, la hipotenusa medirá $4^2 + 7^2 = 65$.		

b) Encuentra el valor de las medidas faltantes.



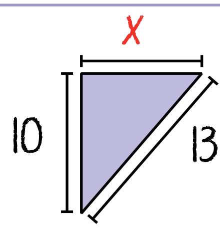
Operaciones:

x =



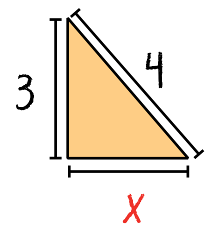
Operaciones:

x =



Operaciones:

x =



Operaciones:

x =

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Organicé las actividades para la rehabilitación del espacio.	
Elaboré formato para distribuir tareas y revisar avances por equipos.	

Secuencia

8

Resolución de problemas con el teorema de Pitágoras

En esta secuencia conocerás la utilidad del teorema de Pitágoras para la resolución de problemas de la vida cotidiana, identificarás triángulos rectángulos que se forman en el entorno, reconocerás cuáles pueden ser medidos y cuáles ejercicios pueden resolverse mediante esta fórmula.

PROYECTO

En esta secuencia concluirás el proyecto *Rehabilitación de un espacio para la convivencia*, con las siguientes actividades.

- Presentación del proyecto ante autoridades locales.
- Elaboración y distribución de lineamientos para el cuidado y conservación del espacio.

Para distinguir las actividades del proyecto recuerda que se utiliza este ícono **PROYECTO**.

INICIO

Actividad de inicio. Marca con una paloma ✓ si las frases son verdaderas (V) o falsas (F).

Frases	V	F
El triángulo rectángulo se llama así porque tiene un ángulo de 45 grados.		
El teorema de Pitágoras solo se aplica en triángulos equiláteros.		
El lado que está frente al ángulo recto de un triángulo rectángulo recibe el nombre de hipotenusa.		
Pitágoras calculó el tamaño de la pirámide de Keops.		
Los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo reciben el nombre de catetos.		

DESARROLLO

Tema 1. Triángulos rectángulos que puedes medir en el entorno

Los triángulos se pueden encontrar a diario en nuestro entorno.

Puedes ver triángulos rectángulos en las estructuras de los puentes y en los techos.

En algunos edificios.

Y, por supuesto, en la naturaleza.

Generalmente, muchos de los triángulos rectángulos que hay en el entorno cuentan con hipotenusas que son difíciles de medir, como en un puente como el de la imagen.

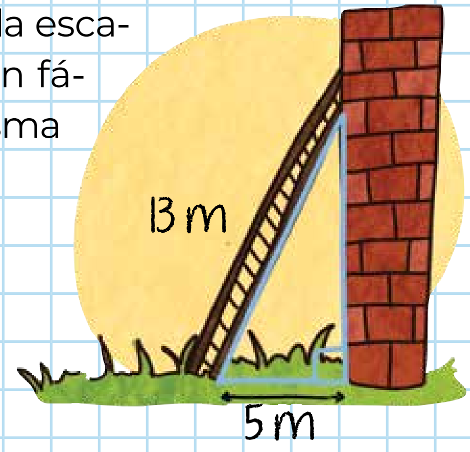
El teorema de Pitágoras se utiliza para calcular la medida desconocida de un lado de un triángulo rectángulo.

Si quisieras medir el triángulo rectángulo formado por una montaña, difícilmente podrías usar un instrumento convencional.

CÓDIGO COMÚN

Flexómetro: cinta métrica enrollada dentro de una caja.

Si se tiene una escalera de 13 metros de longitud recargada en una pared, puede medirse con un **flexómetro** la distancia que hay entre la pared y el punto donde pisa la escalera, pero la distancia de la cima de la escalera al suelo ya no es tan fácil de medir con esa misma cinta métrica.



Actividad 1. **Repasa tus aprendizajes sobre el teorema de Pitágoras.**

a) Elige la palabra o frase que completa el texto de forma correcta y escríbela en el espacio en blanco.

El teorema de Pitágoras se utiliza para calcular la medida de un lado en los triángulos ______________________ (escalenos/isósceles/rectángulos).

Estos triángulos pueden encontrarse en el entorno, por ejemplo, en la cuadra de una ciudad, donde ______________________ (el ángulo recto/la hipotenusa/uno de los catetos) es la distancia diagonal que hay de una esquina a su contraesquina.

Así también, ______________________ (la hipotenusa/los catetos/los ángulos) son las distancias de cada una de las calles que forman una esquina.

b) Subraya la respuesta correcta para cada pregunta.

1. En el triángulo rectángulo formado por la sombra en el piso de una persona que está de pie, ¿cuál es el lado que forma la hipotenusa?
   - La altura de la persona.
   - La longitud de la sombra.
   - La distancia de la punta de la sombra a la punta de la cabeza de la persona.

2. En el triángulo rectángulo formado por un poste, su cable estabilizador y la distancia a la que el cable está sujeto al suelo, ¿cuál es la distancia más fácil de medir?
   - La altura del poste.
   - La distancia a la que el cable está sujeto al suelo.
   - La longitud del cable estabilizador.

3. En el triángulo rectángulo formado por las calles que llegan a la esquina de una cuadra en una ciudad y la diagonal de esa cuadra, ¿cuál es el lado más difícil de medir?
   - La longitud de la diagonal
   - La longitud de las dos calles
   - La longitud de una de las calles

PROYECTO

Para concluir el proyecto, preséntalo ante la autoridad correspondiente con el fin de que se comprometa en el cuidado del espacio recuperado, así como en la instalación de servicios municipales.

La idea es sumar esfuerzos para alcanzar el objetivo, que es la rehabilitación del espacio seleccionado, para beneficio de la biodiversidad de la comunidad de la vida.

a) Reúnete con las personas que participan en el proyecto y establezcan un acuerdo para decidir a qué autoridad van a presentarlo. Escribe cuál fue su decisión colectiva y por qué:

____

____

____

____

b) Pidan cita para acudir con la autoridad seleccionada. Anota la fecha en la que se llevará a cabo la reunión.

____

____

c) El día de la reunión, expresa el interés de la comunidad por mejorar el espacio de convivencia, muestra las fotos, la maqueta y el informe sobre el estado en el que se encontraba el espacio y los avances que se lograron con la intervención de quienes participan en su recuperación.

d) Soliciten lo que no estuvo a su alcance, para que las autoridades también colaboren.

e) Escribe los acuerdos a los que llegaron con la autoridad:

Tema 2. El teorema de Pitágoras y su representación gráfica

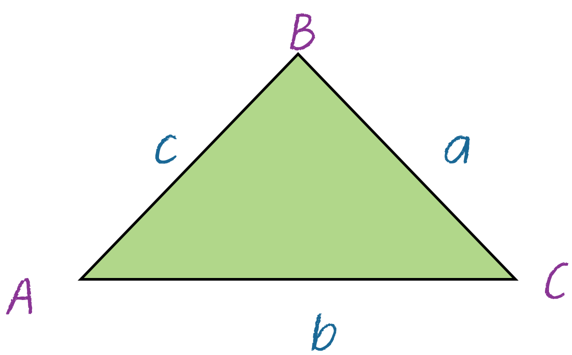
Si se quiere resolver algún problema con este teorema, primero hay que asegurarse de que se aplicará en un triángulo rectángulo, lo que implica asegurarse de la existencia de un **ángulo recto o de 90°**.

CONEXIONES

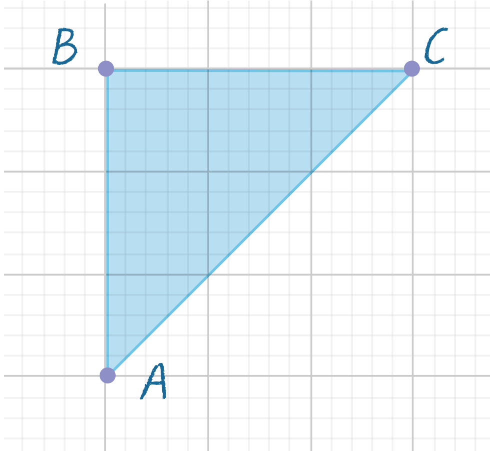
Revisa en la secuencia 7 de esta unidad y módulo las características del teorema de Pitágoras.

Repasa los tipos de ángulo en la secuencia 5 de esta unidad y módulo.

Observa esta imagen, ¿es un triángulo rectángulo?

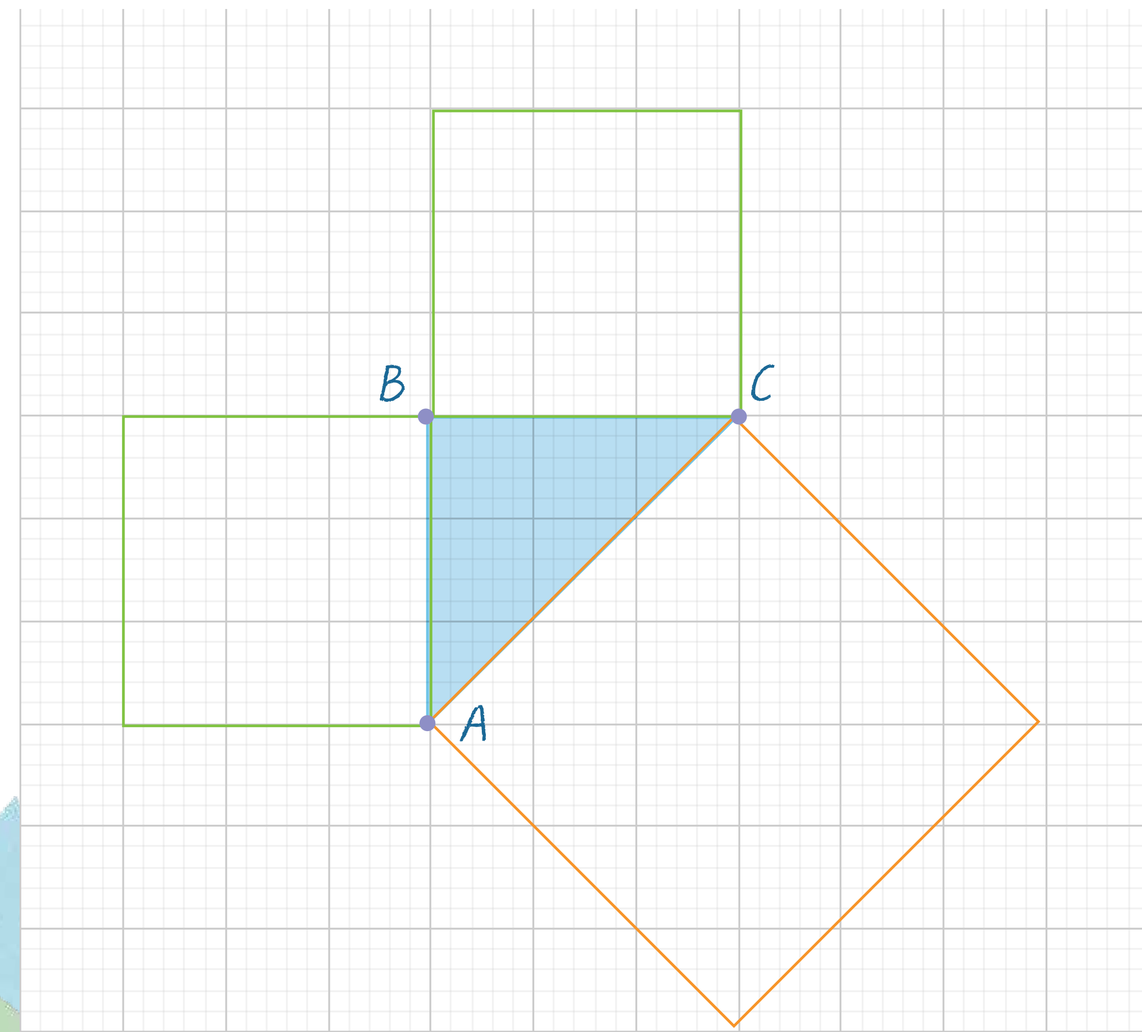


Sí lo es, pero tiene por base la hipotenusa. También es isósceles porque sus dos catetos miden lo mismo. No importa la forma como esté dibujado: si tiene un ángulo de 90° es un triángulo rectángulo. Obsérvalo en otra posición.



Ahora es más claro que se trata de un triángulo rectángulo. Observa la comprobación gráfica del teorema.

Aún sin conocer las dimensiones, al dibujar el triángulo sobre papel milimetrado se observa que los dos catetos son iguales porque tienen la misma medida, que es 3, si se considera cada cuadro grande del papel como una unidad. También puede observarse que tienen áreas iguales, señaladas en color verde.



Se cuentan los cuadros del área de cada cateto y se suman para conocer el valor del área de la hipotenusa. El área correspondiente a cada cateto es 9, si se suman ambos valores tenemos $9 + 9 = 18$. Esta es la medida del área de la hipotenusa.

Aunque resulta difícil contar los cuadros que forman el área debajo de la hipotenusa, si lo haces obtendrás como resultado 18, el mismo que se obtuvo de sumar las áreas de los dos catetos. También es difícil contar la medida de la hipotenusa porque no será exacta.

Entonces, para obtener la hipotenusa, es más exacto utilizar la fórmula:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Ya se sabe que a y b son iguales, que ambos miden 3 unidades, que el cuadrado de cada uno es 9 y que al sumarlos dan 18.

Así, se reemplaza en la fórmula y ya solamente se sigue el proceso para sacar la raíz.

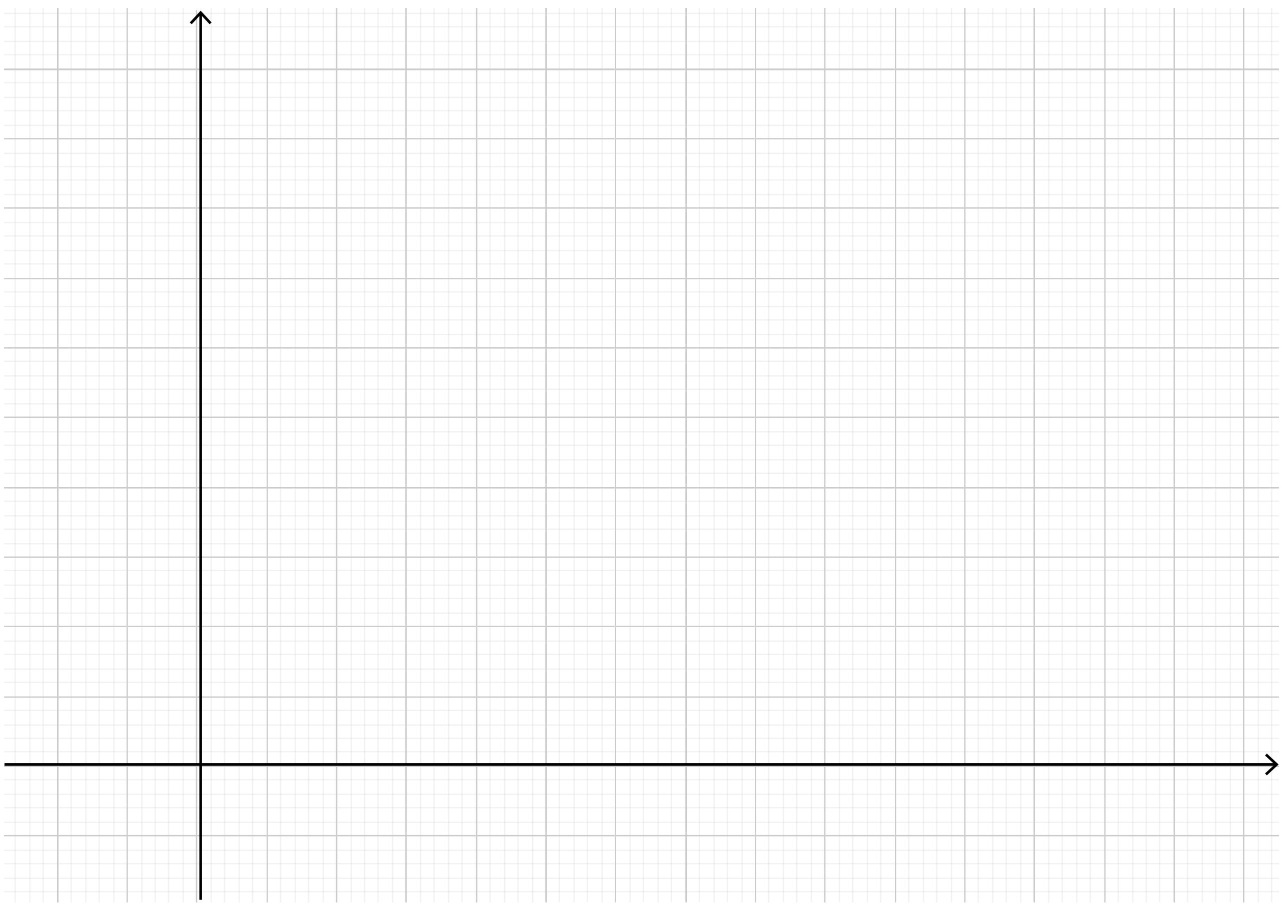
$$c^2 = (3)^2 + (3)^2$$
$$c^2 = 9 + 9$$
$$c^2 = 18$$
$$c = \sqrt{18}$$
$$c = 4.25$$

La medida de la hipotenusa es 4.25 unidades.

Al tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, si se conoce el valor de uno de sus catetos y de la hipotenusa, puede calcularse el valor del cateto faltante.

Actividad 2. **Practica tus aprendizajes acerca del triángulo rectángulo y su representación gráfica.**

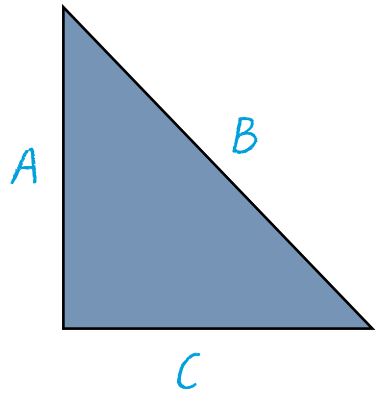
a) En la página siguiente hay tres triángulos. Recórtalos y haz lo que se te pide.



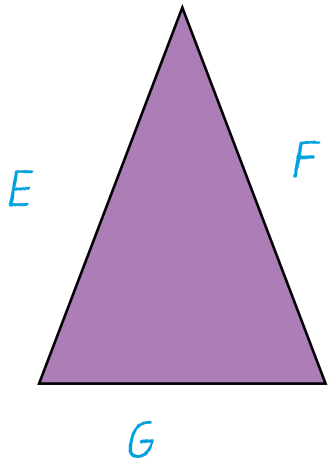
b) Coloca el triángulo A sobre el papel milimetrado y mídelo como si dicho papel fuera una regla. Comienza por los catetos, asegúrate de colocar bien el triángulo y no moverlo. Después, acomoda el triángulo para que puedas contar la hipotenusa sin que esté en diagonal. Anota las medidas. Haz lo mismo con los otros dos triángulos.

RECORTABLE 1

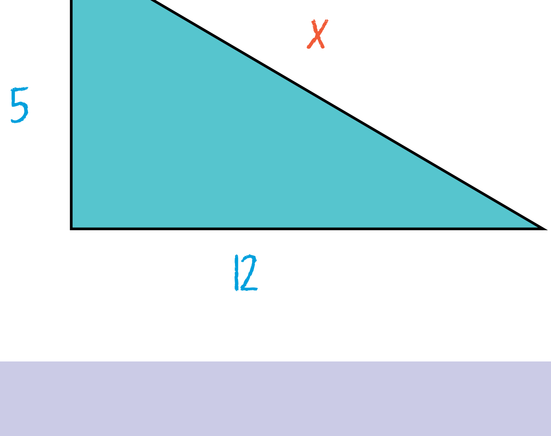
Triángulo A

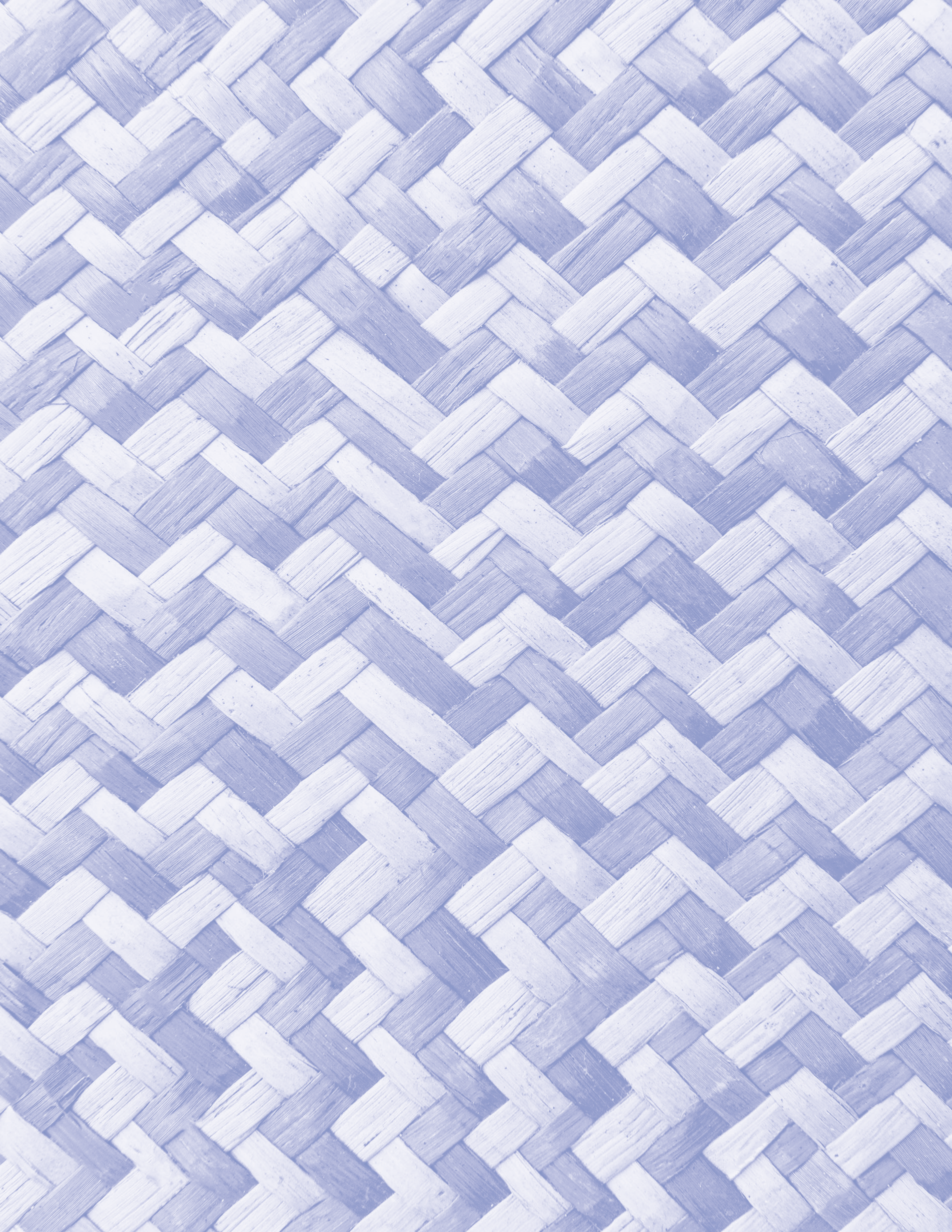


Triángulo B



Triángulo C





c) Responde las preguntas.

1. ¿Cuáles son las medidas de los tres triángulos?

triángulo A

triángulo B

triángulo C

2. ¿Los tres son triángulos rectángulos? ¿Por qué?

3. Además de isósceles, ¿qué tipo de triángulo es el *B*?

d) Pega el triángulo *A* en el recuadro milimetrado de la página 220, cuidando que dos de sus lados queden sobre las líneas y dibuja las áreas de sus catetos y la hipotenusa. Guíate por la cuadrícula.

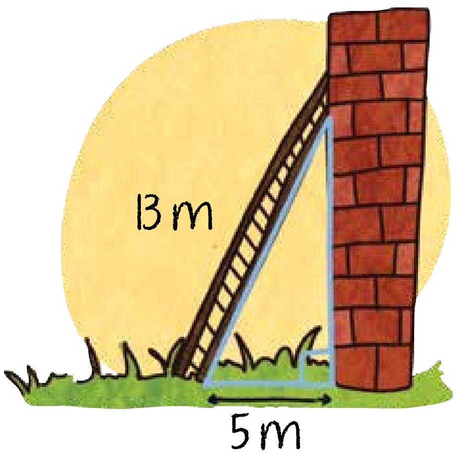
e) Calcula el valor de la hipotenusa del triángulo C.

X =

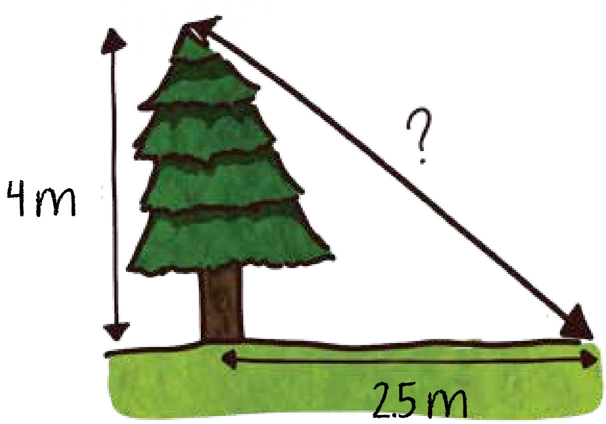
Tema 3. Situaciones cotidianas que se resuelven con el teorema de Pitágoras

Para usar el teorema de Pitágoras es mejor conocer la longitud de dos de los lados del triángulo rectángulo para resolverlo. No importa qué lados del triángulo sean.

Por ejemplo, en esta imagen se conoce la **longitud de la hipotenusa** y la de **uno de los catetos.**



Por lo tanto, es posible calcular la longitud del otro cateto.



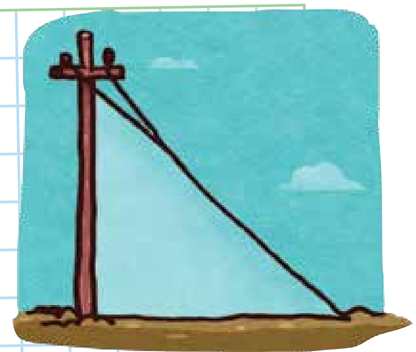
En esta otra imagen se conoce la **longitud de los dos catetos**, así que es posible calcular la longitud de la hipotenusa.

Ejemplo 1:

CONEXIONES

Recuerda cómo resolver ecuaciones con una incógnita en la secuencia 1 de la unidad 1 de este módulo.

El cable estabilizador de un poste telefónico de 15 metros de altura se rompió. Si se sabe que el cable estaba sujeto al suelo a una distancia de 6 metros del poste, ¿cuánto debe medir el cable de repuesto?

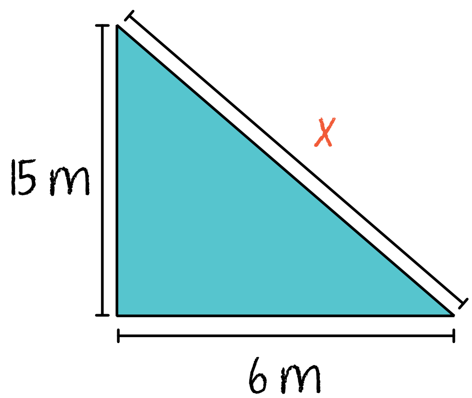


Para resolver el problema, primero se identifica cuál es la incógnita y se nombra con la letra x.

Como en el problema se pide encontrar la longitud del cable de repuesto, entonces:

$$x = \text{longitud del cable}$$

Ahora, para ver claramente lo que se pide, se dibuja un diagrama que represente el problema:



Como puedes ver, la longitud del cable, representada por x, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 metros (distancia entre el poste y donde se sujeta el cable) y 15 metros (altura del poste).

Por lo tanto, para calcular la longitud del cable se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Solo que en este caso la hipotenusa recibe el nombre de x, mientras que los catetos siguen llamándose a y b.

$c = x$ $\quad\quad$ $a = 6$ $\quad\quad$ $b = 15$

Por lo tanto:

$$x^2 = 15^2 + 6^2$$

Al despejar x, queda:

$$x = \sqrt{15^2 + 6^2}$$

Al hacer las operaciones, se tiene que:

$$x = \sqrt{15^2 + 6^2}$$

$$x = \sqrt{225 + 36}$$

$$x = \sqrt{261}$$

$$x = 16.15$$

El cable de repuesto debe medir 16.15 metros.

Ejemplo 2:

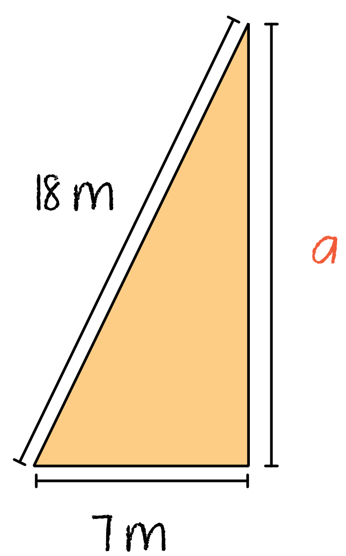
Para otro poste, se sabe que el cable estabilizador mide 18 metros de longitud y está sujeto a 7 metros del poste. ¿Cuál es la altura del poste?

En este caso lo que se solicita calcular es la altura del poste, a la cual se identificará con la letra a.

De esta forma:

$$a = \text{altura del poste}$$

El diagrama que representa este problema es el siguiente:



Como puedes ver, el lado a del triángulo rectángulo es un cateto, mientras que el otro cateto tiene una longitud de 7 metros y la hipotenusa mide 18 metros.

Por lo tanto, en este caso, en el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = 18$$

$$a = ?$$

$$b = 7$$

Es necesario despejar la a^2 de la fórmula del teorema para conocer su valor. Al hacerlo, queda así:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Ahora, se sustituyen los valores conocidos y se hacen las operaciones:

$$a = \sqrt{18^2 - 7^2}$$

$$a = \sqrt{324 - 49}$$

$$a = \sqrt{275}$$

$$a = 16.58$$

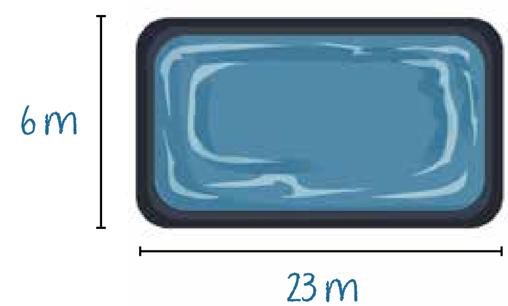
La altura del poste es de 16.58 metros.

Actividad 3. **Repasa tus aprendizajes y subraya la respuesta correcta en cada situación.**

1. Si una cuerda tensa, de 10 metros de longitud, está sujeta al punto más alto de un árbol y llega a 3 metros de su base, ¿cuál es la altura del árbol?
   - 9.12 m
   - 9.53 m
   - 9.72 m
   - 9.84 m

2. Una escalera de 5 metros de longitud está recargada sobre la pared a 1 metro del muro. ¿A qué altura está recargada la escalera?
   - 4.15 m
   - 4.39 m
   - 4.68 m
   - 4.89 m

3. Un bordo de agua rectangular mide 6 metros de ancho y 23 de largo. ¿Cuánto mide su diagonal?
   - 22.13 m
   - 22.85 m
   - 23.77 m
   - 24.26 m



4. Una caja cuadrada mide 6 cm de largo. ¿Cuánto mide su diagonal?
   - 8.48 cm
   - 8.69 cm
   - 8.96 cm
   - 9.23 cm

5. ¿A qué distancia diagonal están los pies de una persona de la punta de un árbol de 8 metros de altura, si está parada a 4 metros de la base del árbol?
   - 8.44 m
   - 8.94 m
   - 9.1 m
   - 9.47 m

6. Un terreno rectangular mide 22 metros de largo y 8 metros de ancho. ¿Cuánto mide su diagonal?
   - 23.11 m
   - 23.4 m
   - 24.06 m
   - 24.62 m

7. ¿A qué distancia diagonal se encuentra el pararrayos de un edificio de 70 metros de altura con respecto de los pies de una persona ubicada a 3 metros del edificio?
   - 70.01 m
   - 70.06 m
   - 70.4 m
   - 70.63 m

PROYECTO

Para finalizar, da seguimiento a lo acordado con las autoridades a quienes se presentó el trabajo de recuperación del espacio.

Organiza el establecimiento y difusión de las reglas para conservar el espacio recuperado, para que las personas usuarias las respeten y este funcione en condiciones favorables.

CIERRE

En esta secuencia se mostraron diferentes casos que se resuelven con el teorema de Pitágoras y que puedes practicar cuando necesites calcular la longitud de algún lado de un triángulo rectángulo.

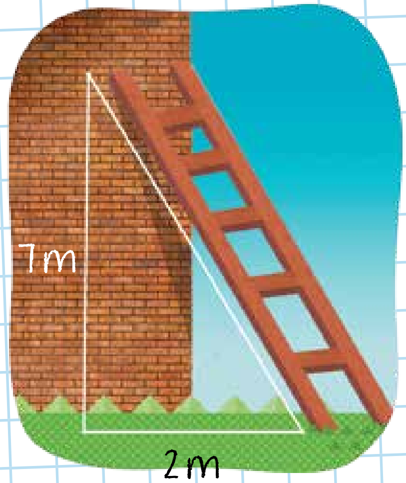
Actividad de cierre. **Repasa y practica tus aprendizajes sobre el teorema de Pitágoras.**

a) Responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

Frases	V	F
Se pueden calcular distancias diagonales conociendo sus dos lados rectos.		
El teorema de Pitágoras permite calcular longitudes.		
La longitud desconocida de un triángulo rectángulo siempre es la hipotenusa.		
Se puede calcular la diagonal de un rectángulo conociendo su largo y ancho.		

b) Resuelve el problema siguiente.

Una escalera está recargada a 7 metros del suelo y se apoya a 2 metros del muro. ¿Cuánto mide la escalera?



Operaciones:

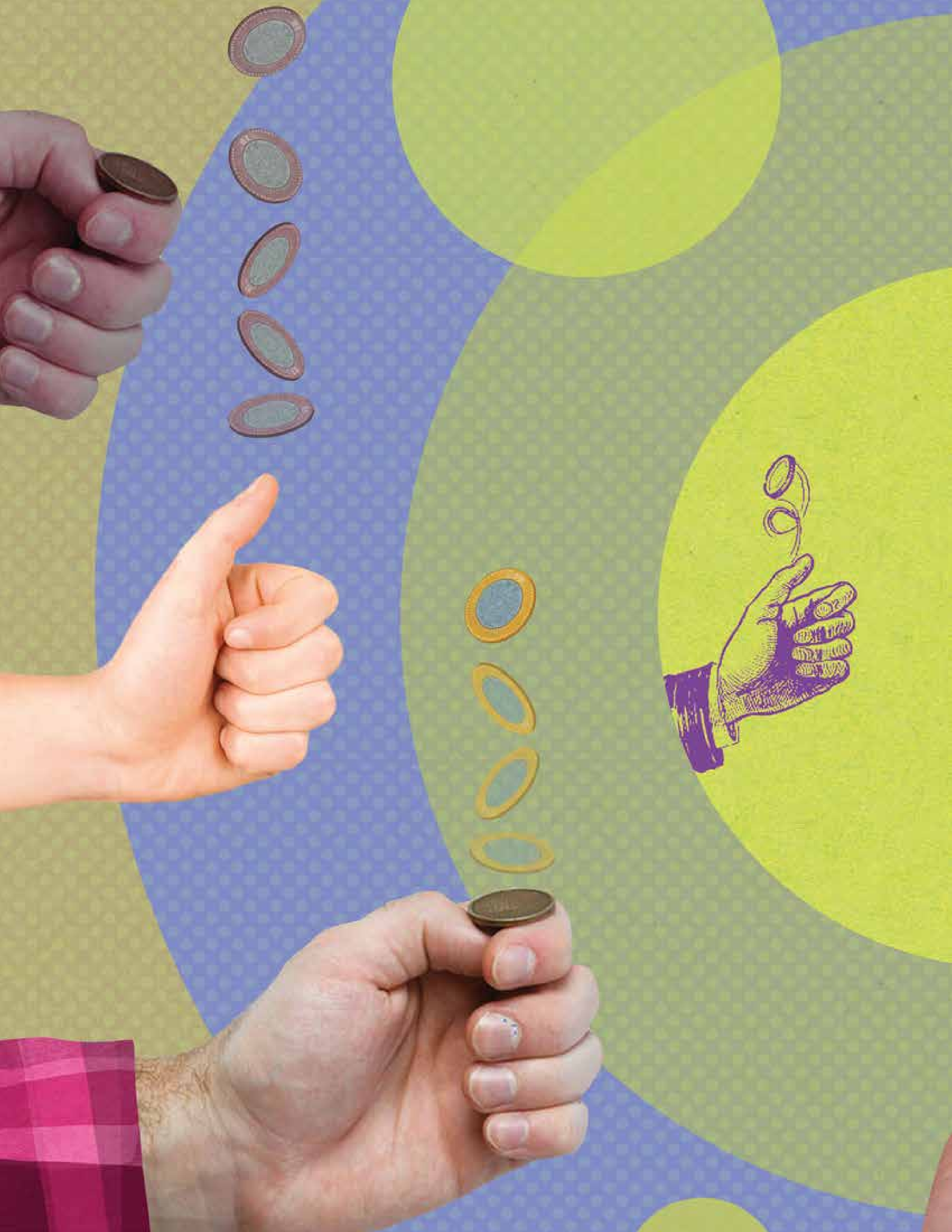
Resultado:

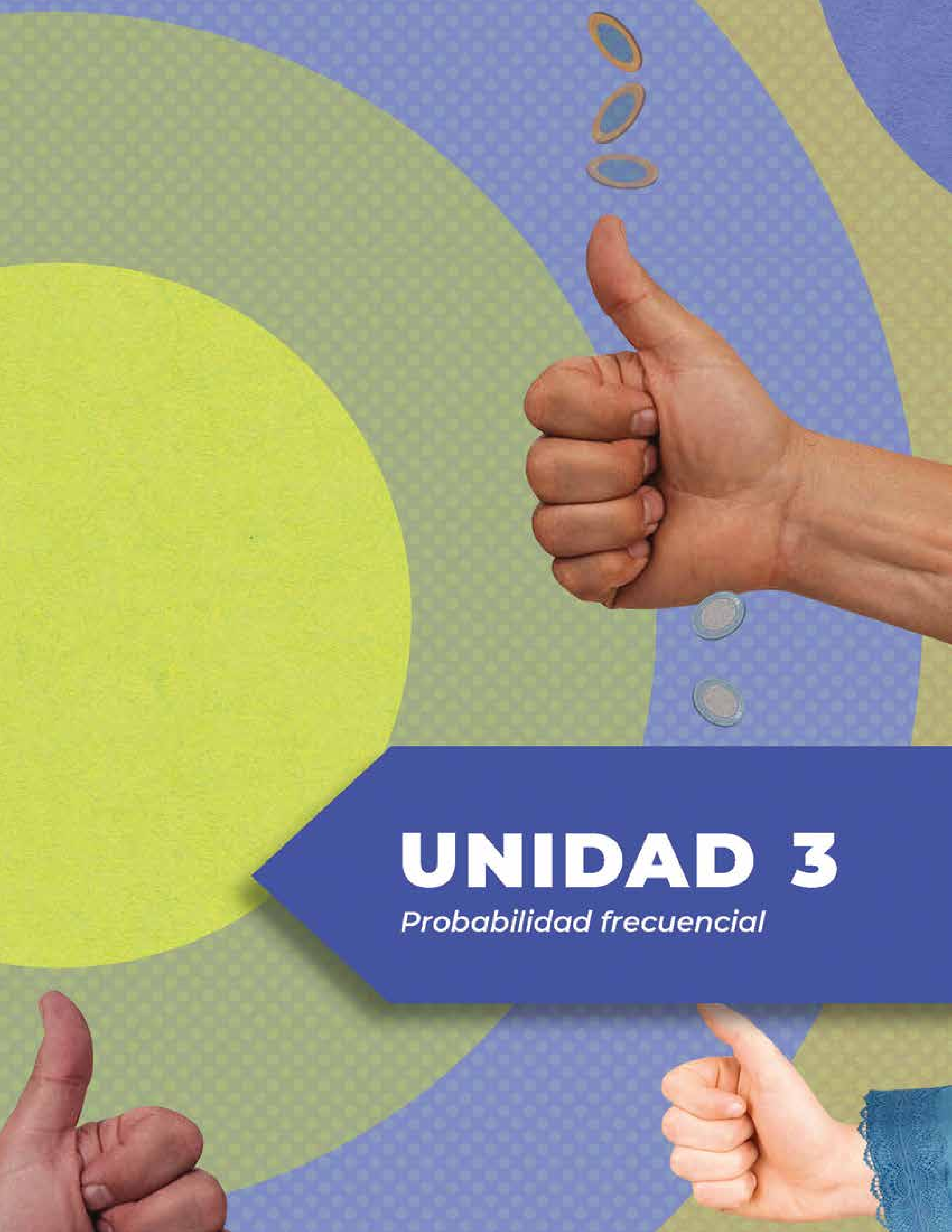
PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Presenté el proyecto ante autoridades locales.	
Elaboré y distribuí lineamientos para el cuidado y conservación del espacio.	

Si te falta alguna actividad
Ponte al corriente
Si te falta alguna actividad





UNIDAD 3

Probabilidad frecuencial

En esta unidad trabajarás con experimentos de probabilidad frecuencial, misma que distinguirás de la probabilidad clásica. De esta forma, conocerás los conceptos de frecuencia y aproximación, reconocerás la forma de agrupar resultados de experimentos, contabilizarlos mediante tablas de conteo y graficarlos con histogramas. Al aprender a interpretar los resultados de un experimento aleatorio, tendrás la capacidad de comprender la información y distinguir la certeza de que ocurra o no un evento.

Con la organización del proyecto *La Katatómbola* recolectarás fondos que permitan realizar mejoras en la colonia o comunidad, para promover la participación social y la convivencia pacífica.

Secuencia

9

La probabilidad frecuencial

En esta secuencia aprenderás la diferencia entre probabilidad frecuencial y probabilidad clásica, y las identificarás en distintos ejemplos de la vida cotidiana.

PROYECTO

Organizarás el proyecto *La Katatómbola* con el propósito de promover la cooperación, así como la participación social y pacífica para la mejora de la colonia o comunidad.

Las actividades a desarrollar en el proyecto son las siguientes:

- Lectura del fragmento de un artículo sobre la probabilidad y la ciencia.
- Reflexión acerca de las mejoras necesarias a la comunidad tras recabar fondos con un sorteo.

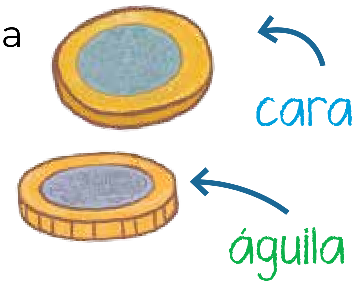
Recuerda que usamos el ícono **PROYECTO** para diferenciar las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. **Para identificar lo que sabes respecto al tema, realiza lo que se solicita.**

a) Invita a una persona del *Círculo de estudio*, familiar o amistad a jugar a los volados, para ello necesitarán una moneda.

- Elige la cara o águila de la moneda con la que desean participar.
- Empezará quien haya elegido cara.
- Cada participante hará 10 lanzamientos.



- En la siguiente tabla, registra las veces que obtengas un resultado favorable y después responde las preguntas.

Tabla de registro de tiradas	
Lado	**Resultado favorable**
Cara	
Águila	

1. ¿Quién obtuvo más veces el resultado que deseaba?

____

2. Si repitieran el juego, ¿es seguro que obtengan los mismos resultados? ¿Por qué?

____
____
____
____

3. ¿Puedes asegurar si la moneda caerá cara o águila en el próximo lanzamiento?

4. Si tres veces cayó águila, ¿es seguro que la próxima tirada sea nuevamente águila? ¿Por qué?

5. Escribe tu opinión sobre las posibilidades de acertar en los volados.

DESARROLLO

Tema 1. La probabilidad frecuencial y su fórmula

CONEXIONES

Revisa lo que has visto de probabilidad clásica en la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

La **probabilidad** es una rama de las matemáticas que estudia la posibilidad de que suceda un evento especifico, mediante los experimentos aleatorios podemos analizar las posibilidades de que este ocurra cuando interviene el azar.

Ya sabes calcular la probabilidad de obtener un resultado dada cierta cantidad de posibilidades, por ejemplo, al lanzar una moneda se tienen dos: cara o águila, cada una tiene $\frac{1}{2}$ de probabilidad de caer.

La **probabilidad frecuencial** es otro método que estudia qué *tan probable resulta un suceso si un experimento se repite muchas veces*. Esta probabilidad puede expresarse como el cociente o división entre la cantidad de casos favorables y el número de casos posibles.

La **probabilidad frecuencial** se emplea cuando se trabaja con un número muy elevado de repeticiones y sirve para tener una idea de la tendencia de los resultados a largo plazo. Al tener muchas repeticiones, el estudio de la probabilidad frecuencial se hace mediante tablas de valores.

Observa el esquema siguiente y aprecia la diferencia entre ambas probabilidades.

Probabilidad clásica

Trabaja con datos ya obtenidos de los experimentos, es decir, ya se sabe cuán probable es que ocurra un evento.

Al lanzar una moneda, ya se sabe que la mitad de las veces caerá en cara y la otra mitad en águila; es decir, tiene $\frac{1}{2}$ o 0.5 de probabilidad de caer en una o en otra opción.

Se basa en la teoría.

Probabilidad frecuencial

Se quiere saber qué tan probable es que ocurra un evento realizando el experimento.

Al lanzar una moneda, no se sabe cuán probable es que caiga cara o águila, así que se arroja y se van registrando las veces que cayó de cada lado, y con esos datos se da un valor de cuán probable es que caiga cara o águila.

Se basa en la práctica.

La **probabilidad clásica** y la **probabilidad frecuencial** estudian la misma posibilidad de ocurrencia de un evento, pero la probabilidad frecuencial lo hace de manera experimental.

Si se pudiera realizar el experimento de la moneda infinitas veces, resultaría que la mitad caería cara y la otra mitad águila, tal como la probabilidad clásica predice.

Para calcular ese valor se utiliza la fórmula siguiente:

$$P(S) = \frac{S}{N}$$

Donde S es la cantidad de casos favorables o veces en que se da el suceso y N es el número de veces que se repite el experimento.

Se lee: "la probabilidad de que ocurra un suceso es igual a la cantidad de veces que se da dicho suceso entre el número de veces que se hace el experimento".

En el caso de la moneda, S son las veces en que cayó cara cuando se lanzó y N es la cantidad de veces que se repite el experimento. Y es lo mismo para cuando cae águila.

Esta fórmula indica que la **probabilidad frecuencial** consiste en repetir un experimento y anotar cuántas veces cayó una moneda de un lado o del otro; en el caso de un dado, consiste en anotar cuántas veces cayó cualquiera de los seis números que tiene.

Actividad 1. **Selecciona la palabra que complete correctamente cada frase, de acuerdo con lo visto en el tema.**

1. La probabilidad ________________ se basa en datos teóricos.
   - clásica
   - frecuencial
   - estadística

2. La probabilidad ________________ se basa en datos empíricos.
   - clásica
   - frecuencial
   - estadística

3. La probabilidad frecuencial se emplea cuando:
   - tengo que realizar un experimento para saber qué tan probable es que suceda algo.
   - ya tengo la información de cuán probable es que suceda algo.
   - quiero saber qué tan probable es que haya leche en el mercado.

4. La probabilidad frecuencial y la probabilidad clásica:
   - no están relacionadas.
   - se basan en la experimentación.
   - calculan la probabilidad de un evento.

5. La probabilidad frecuencial arroja los mismos datos que la probabilidad cuando:
   - repito el experimento 2 veces.
   - repito el experimento una cantidad infinita de veces.
   - repito el experimento algunas veces.

6. Selecciona la frase que explica por qué es importante la probabilidad frecuencial.
   - Porque no siempre es posible saber desde antes cuán probable es que ocurra algo.
   - Porque es una herramienta para verificar que la probabilidad es correcta.
   - Porque nos ayuda a conocer la posibilidad de que un evento vuelva a ocurrir.

PROYECTO

Para iniciar con las actividades del proyecto lee el siguiente artículo.

Lee en voz alta

Comparte la lectura

LA MATEMÁTICA ■ REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

¿Lo sabía? La probabilidad y la ciencia detrás de la lotería y el azar

¿Sabías que la lotería y el azar están respaldados por la probabilidad y la ciencia? Hoy en día, muchas personas compran boletos de lotería con la esperanza de que la suerte les sonría y puedan hacerse millonarias. Sin embargo, las estadísticas señalan que esto es una de las peores inversiones que se pueden hacer debido a que no tiene un retorno económico garantizado.

Por ejemplo, no es más probable que un número ganador esté en una determinada tienda solo porque varios números han caído allí, sino porque la tienda ha vendido más billetes de lotería que el resto. Tampoco existe más posibilidad de que un número sea premiado solo porque hace tiempo no ha salido. Además, la tinta con la que se marcan los números en las pelotas de la tómbola no afecta el peso y, por lo tanto, no determina qué número saldrá.

La probabilidad en los juegos de lotería es simple: todos los números tienen las mismas posibilidades de salir, y cada pelota tiene las mismas posibilidades de ser elegida. En otras palabras, todos los números son igualmente probables en un juego de lotería justo. Por lo tanto, la próxima vez que compres un boleto de lotería, recuerda que la probabilidad y la ciencia respaldan las posibilidades de ganar.

Tema 2. Práctica de probabilidad frecuencial

Ahora revisaremos cómo se hacen los experimentos y cómo se aplica la **probabilidad frecuencial**.

Práctica de probabilidad

Materiales

- Lápiz
- Hoja de papel (puede ser reciclada)
- 1 moneda
- 1 dado

Experimentos

- Moneda: qué tan probable es que caiga águila al lanzar la moneda.
- Dado: qué tan probable es que caiga el número 3 al lanzar el dado.

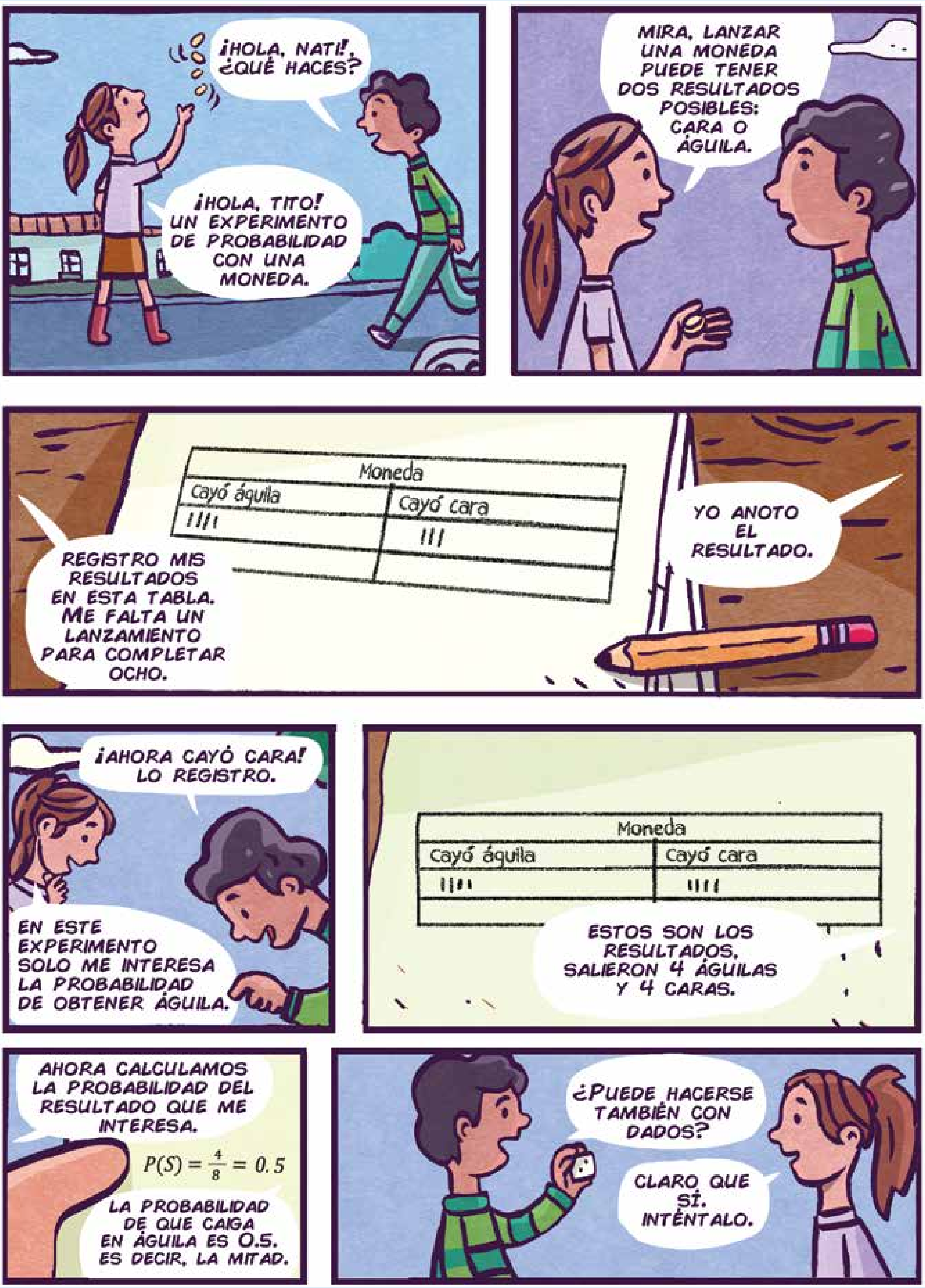
Posibles resultados:

- Moneda: cara o águila
- Dado: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Estos son los experimentos propuestos con sus posibles resultados. Observa cómo Nati y Tito hicieron el primero.

En la hoja dibuja dos tablas con dos columnas, en una de ellas anota cuántas veces cayó el lado de la moneda que reconocemos como águila y en la otra, cuántas veces cayó el dado en el número 3.

- Moneda: cae águila
- Dado: cae 3


¡HOLA, NATI!, ¿QUÉ HACES?
¡HOLA, TITO! UN EXPERIMENTO DE PROBABILIDAD CON UNA MONEDA.
MIRA, LANZAR UNA MONEDA PUEDE TENER DOS RESULTADOS POSIBLES: CARA O ÁGUILA.
Moneda
Cayó águila
Cayó cara
REGISTRO MIS RESULTADOS EN ESTA TABLA. ME FALTA UN LANZAMIENTO PARA COMPLETAR OCHO.
YO ANOTO EL RESULTADO.
¡AHORA CAYÓ CARA! LO REGISTRO.
EN ESTE EXPERIMENTO SOLO ME INTERESA LA PROBABILIDAD DE OBTENER ÁGUILA.
Moneda
Cayó águila
Cayó cara
ESTOS SON LOS RESULTADOS, SALIERON 4 ÁGUILAS Y 4 CARAS.
AHORA CALCULAMOS LA PROBABILIDAD DEL RESULTADO QUE ME INTERESA.
$P(S) = \frac{4}{8} = 0.5$
LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA EN ÁGUILA ES 0.5, ES DECIR, LA MITAD.
¿PUEDE HACERSE TAMBIÉN CON DADOS?
CLARO QUE SÍ. INTÉNTALO.

CÓDIGO COMÚN

Marcas de conteo: también conocidas como “palos de cómputo”, se utilizan para contar y se agrupan de cinco en cinco, colocando cuatro palitos y “tachándolos” con el quinto:

卌 = 5

Ese es el único caso que nos importa para cada experimento, cuando caiga algo distinto, lo anotaremos en la otra columna, estas anotaciones pueden hacerse con **marcas de conteo** (palitos) o números, como más sencillo se te haga.

Tus tablas de conteo deben verse así:

Moneda	
Águila	Cara
||||	||||

Dado	
3	Cualquier otro caso
||	卌 卌

Estos son ejemplos, por tratarse de resultados donde interviene el azar, los que obtengas en tu experimento pueden ser distintos.

Así se registran los datos de un experimento de probabilidad frecuencial, pero falta **cuantificar** la probabilidad con un número.

La fórmula es:

$$P(S) = \frac{S}{N}$$

Sustituye los valores para el caso de la moneda:

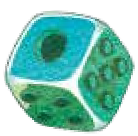
$$P(S) = \frac{4}{8}$$

Se ve en la tabla que las veces que cayó águila fueron 4, entonces $S = 4$; por otra parte, $N = 8$ porque, como se observa al sumar los resultados de las dos columnas de la tabla, el experimento se repitió 8 veces.

Entonces, la probabilidad de sacar águila al lanzar la moneda es de 0.5 o del 50%.

Para el caso del dado se procede igual. En la tabla se registró que cayó en el número 3 un total de 2 veces, y en cualquier otro lado del dado cayó 10 veces. Entonces $S = 2$ y $N = 12$.

Se sustituyen los valores en la fórmula y se realizan las operaciones.



$$P(S) = \frac{S}{N}$$

$$P(S) = \frac{2}{12}$$

$$P(S) = 0.16$$

La probabilidad de sacar 3 al lanzar un dado es de $\frac{1}{6}$ o 0.16, o bien del 16%, pues las tres cantidades indican lo mismo.

¡Listo!, ahora ya sabes registrar los datos de un experimento de probabilidad frecuencial.

CONEXIONES

Recuerda que la probabilidad se mide de 0 a 1; asimismo, que se puede representar con números decimales, con fracciones y con porcentajes.

Consulta la secuencia 11 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

Actividad 2. Marca con una paloma ✓ si las oraciones son verdaderas (V) o falsas (F).

ORACIONES	V	F
Para registrar los datos de un experimento de probabilidad frecuencial solo debo usar una tabla.		
El valor de N es igual a la suma de las veces que cayó nuestro caso de interés más las veces que no cayó nuestro caso de interés.		
Contestar correctamente una pregunta de verdadero o falso sin saber la respuesta es algo que puede ser estudiado con la probabilidad frecuencial.		
En la fórmula de la probabilidad frecuencial, la letra S es la cantidad de veces que NO cayó nuestro caso de interés.		
Para sacar la probabilidad frecuencial de que ocurra un evento, debo realizar el evento infinitas veces.		

PROYECTO

Como leíste en el texto *¿Lo sabía? La probabilidad y la ciencia detrás de la lotería y el azar* al participar en un sorteo es baja la oportunidad de ganar algún premio. Sin embargo, instituciones como la Lotería Nacional para la Asistencia Pública recaban así fondos para que el gobierno los redistribuya entre la población mediante obras públicas. Por lo tanto, más que ganar un premio, en ocasiones el objetivo es apoyar una buena causa.

En este proyecto, te organizarás con otras personas de tu colonia o comunidad para llevar a cabo una rifa y recabar fondos con un propósito común. Puedes seguir este ejemplo hipotético.

En un municipio, las personas decidieron remodelar el auditorio comunitario donde realizan sus convivios y ceremonias, para ello organizaron una rifa y pidieron apoyo a las personas comerciantes para conseguir los premios. Una persona donó una despensa; otra, un cupón para una comida en su cocina económica con una persona acompañante; una más, donó una silla mecedora. La persona propietaria de una tienda de telefonía ofreció un celular, mismo que será el premio mayor. Hicieron mil boletos para venderlos en $150.00 cada uno: si se venden todos, obtendrán $150 000.00 para la remodelación.

a) Reflexiona con otras personas de tu colonia o comunidad para llevar a cabo un sorteo en beneficio de la misma. No tiene que ser muy grande.

1. ¿Qué mejoras son necesarias para tu comunidad? Puede ser pintar un espacio público, limpiar un terreno, un curso sobre algún tema de interés común, un convivio para estrechar lazos, comprar libros o juegos recreativos para la escuela o el centro comunitario.

2. Menciona tres opciones.

3. Consideren en conjunto cuál de esas opciones es más útil para la comunidad. Descríbela.

CIERRE

En esta secuencia aprendiste el concepto de probabilidad frecuencial y su diferencia con la probabilidad clásica; también viste ejemplos sobre cómo se registran los datos obtenidos mediante experimentos de probabilidad frecuencial. A la par, iniciaste el proyecto de la unidad.

Actividad de cierre. Realiza el experimento de lanzar una moneda 30 veces y ver cuántas veces cae en águila.

a) Completa lo siguiente:

1. Posibles resultados del experimento: __________ o __________.

2. Experimento: qué tan probable es que caiga ____________ en 30 lanzamientos.

b) Realiza tus lanzamientos y utiliza las marcas de conteo para llenar la tabla con tus resultados:

Moneda	
Águila	Cara

c) Sustituye los datos en la fórmula para cuantificar la probabilidad de que haya caído águila.

Fórmula Operaciones

La probabilidad es de: ______________________

d) Responde las preguntas:

1. Con base en tu resultado, ¿cuál fue la probabilidad de obtener cara?

____

2. Si otra persona hiciera este mismo experimento, ¿obtendría los mismos resultados? ¿Por qué?

____

____

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Leí el fragmento de un artículo sobre la probabilidad y la ciencia.	
Reflexioné con otras personas acerca de las mejoras necesarias a la comunidad que pueden realizarse tras recabar fondos con un sorteo.	

Si te falta alguna actividad
Ponte al corriente
Si te falta alguna actividad

Secuencia

10

Experimentos de probabilidad frecuencial

En esta secuencia revisarás experimentos con monedas, dados y canicas; reconocerás los conceptos de aproximación y frecuencia; asimismo, repasarás el registro de frecuencias.

PROYECTO

Continuarás con el desarrollo del proyecto *La Katatómbola*, con las siguientes actividades:

- Definición del número de boletos a sortear.
- Participación en la solicitud de los premios.
- Establecimiento de las reglas para llevar a cabo el sorteo o rifa.
- Venta de boletos.

Recuerda que usamos el ícono **PROYECTO** para diferenciar las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Recupera tus aprendizajes previos sobre los distintos tipos de probabilidad que ya conoces seleccionando y escribiendo las palabras que completen correctamente las oraciones, de las tres opciones que se muestran entre paréntesis.

La probabilidad ____________________ (clásica / objetiva / frecuencial) nos ayuda a obtener un valor aproximado de la probabilidad real de un evento mediante un número finito de repeticiones.

Consiste en _________________ (restar / dividir / multiplicar) el número de eventos favorables entre _________________________ (el total de eventos / los posibles resultados / los eventos no favorables).

La expresión matemática será entonces ___________________ ($P(S) = \frac{S}{N}$ / $P(S) = 2 * S$ / $P(S) = 2 - N$), en donde S representa _______________________ (las repeticiones del evento / los posibles resultados / los resultados favorables) y N representa ____________________. (las repeticiones del evento / los posibles resultados / los resultados favorables)

DESARROLLO

Tema 1. Experimento de probabilidad frecuencial con una moneda

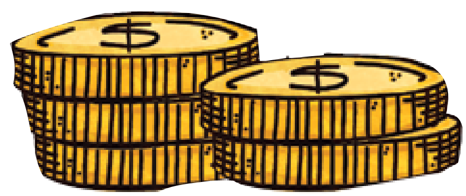
Como viste en la secuencia anterior, cuando se lanza una moneda convencional, es decir, aquella que tiene dos lados, cara y águila, la probabilidad de que caiga cara o que caiga águila es la misma 50% o $\frac{1}{2}$.

Dos sucesos son igualmente probables cuando tienen **la misma probabilidad de ocurrir**. Dicho de otra manera, si se repite el experimento un número muy grande de veces, ambos sucesos ocurrirán aproximadamente el mismo número de veces.

CONEXIONES

Revisa la secuencia anterior, en esta unidad y módulo.

Te sugerimos también revisar las secuencias 10, 11 y 12 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 4* para que vayas comparando la información.



La palabra **aproximar** se utiliza en probabilidad para mencionar que los resultados a obtener no son exactos.

Si se lanza 20 veces una moneda al aire, $N = 20$ significa que se lanzará la moneda 20 veces, y S cambiará de acuerdo con lo que deseas calcular. Si se quiere conocer la probabilidad de que caiga cara al lanzar 20 veces la moneda, se tiene:

$$P(S) = \frac{S}{N} = \frac{\text{Número de veces que la moneda cae en cara}}{20}$$

Para el caso en que la moneda caiga en águila, se obtiene:

$$P(S) = \frac{S}{N} = \frac{\text{Número de veces que la moneda cae en águila}}{20}$$

Si se hace el experimento de lanzar una moneda al aire y registrar los resultados en una tabla de conteo, puede obtenerse lo siguiente.

Resultado	Conteo
Cara	~~IIII~~ III
Águila	~~IIII~~ ~~IIII~~ II

Como se mencionó en la secuencia anterior, cada experimento tiene sus propios resultados. Si lo repites, tus resultados serán aproximados a estos, pero no exactos.

Actividad 1. Marca con una paloma ✓ si las oraciones son verdaderas (V) o falsas (F), según corresponda.

Oraciones	V	F
Si se quiere aproximar la probabilidad de obtener cara y cayeron 7 caras en las 20 repeticiones, entonces S = 7.		
Si se quiere aproximar la probabilidad de obtener cara y cayeron 11 caras en las 20 repeticiones, entonces S = 9.		
Si se quiere aproximar la probabilidad de obtener águila y cayeron 9 águilas en las 20 repeticiones, entonces S = 9.		
Si en las 20 repeticiones cayeron 8 águilas, entonces la probabilidad frecuencial de obtener águilas es $\frac{9}{20}$.		

PROYECTO

El evento que organizarás se llama *La Katatómbola*. Su nombre proviene de dos juegos de azar:

La **katafixia** es una dinámica que surgió en un programa televisivo, consistente en que tres personas ganadoras del concurso tenían oportunidad de cambiar sus regalos por otros que estaban escondidos.

La **tómbola** es una rifa pública de objetos diversos, generalmente como negocio de feria o con fines benéficos.

a) Organiza *La Katatómbola* en colaboración con personas de tu *Círculo de estudio,* comunidad o familia, para colectar fondos para alguna obra en beneficio de la comunidad.

b) Define a las personas que invitarán a participar, ¿serán niños, niñas, adolescentes, jóvenes, personas adultas?

c) ¿Qué premios pueden rifar para que haya participación? Dialoguen sobre los gustos de las personas a quienes venderán boletos, el costo de los premios o si pueden obtener donaciones para *La Katatómbola*.

d) Registra, en el siguiente recuadro, qué premios eligieron para *La Katatómbola*. Observa el ejemplo.

Tabla. Premios de 1er, 2o y 3er lugar			
Premios	1er lugar	2o lugar	3er lugar
Ejemplo	Bocina	Audífonos	Tarjeta de regalo
Katatómbola			

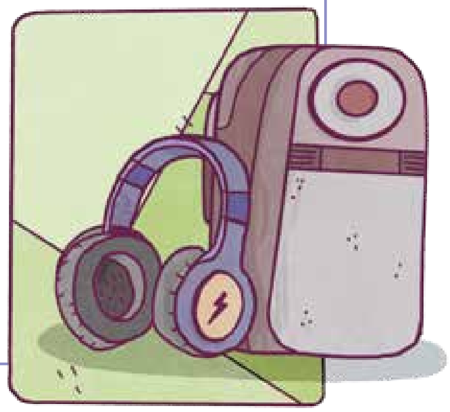
e) Investiga los precios de los premios que seleccionaron para determinar el costo de los boletos. Si los premios serán una donación, también haz la lista de las personas donantes. Para *La Katatómbola* deberán pensar en dos premios más para cada lugar, por si lo desean katafixiar o cambiar.

Tabla de premios para la *Katatómbola*			
Premios	Opción A	Opción B	Opción C
Ejemplo	$500.00	Aguinaldo	1 dulce
Katatómbola			

f) Determina cuántos boletos será necesario vender para que recuperen su **inversión** y ganen un porcentaje extra que permita recabar fondos para **una necesidad colectiva.** Haz las operaciones necesarias en el siguiente recuadro.

CÓDIGO COMÚN

Invertir: emplear dinero o tiempo en algo para obtener un beneficio.

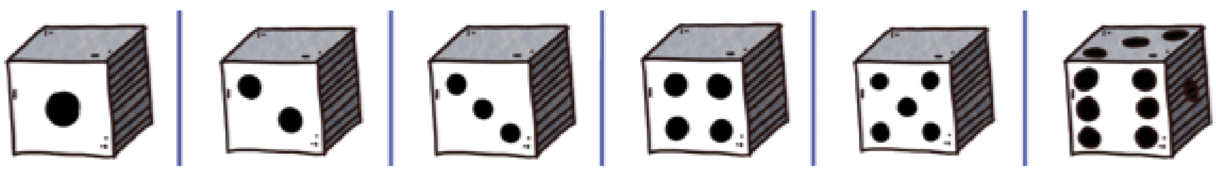


Tema 2. Experimento de probabilidad frecuencial con un dado

Ya conoces los experimentos realizados con un dado, en los que se aproximan los valores para saber qué tan probable es que caiga en uno de sus lados.

Lee cómo se elabora una tabla de frecuencias y observa la diferencia entre este experimento y el anterior de lanzar una moneda, ya que el número de resultados posibles aumenta, de 2 a 6. Como verás, esto impacta directamente en las probabilidades.

El **experimento** a estudiar ahora es tirar un dado 20 veces y registrar los resultados.



CONEXIONES

Sobre este tema de probabilidad clásica, revisa las secuencias 11 y 12 de la unidad 3 del módulo *Pensamiento matemático 4*.

Con un dado existe la misma probabilidad de que caiga en cualquiera de sus 6 lados, es decir, hay $\frac{1}{6}$ de probabilidad de que caiga en 1, $\frac{1}{6}$ de que caiga en 2 y así sucesivamente, como ya viste en la probabilidad clásica.

Recordando la fórmula de probabilidad frecuencial, se debe notar que N es el número de veces que se lanza el dado.

Por otro lado, S depende de qué número se elija para calcular su probabilidad.

Si se lanza 20 veces un dado y se quiere calcular la probabilidad frecuencial de que haya caído en 4, $N = 20$ y S es el número de veces que cayó en 4 durante el experimento, es decir:

$$P(S) = \frac{S}{N} = \frac{4}{20}$$

Esta fórmula aplica para conocer la probabilidad de los otros cinco números restantes.

Los datos de las 20 tiradas se van registrando en una tabla como la que se utilizó en la secuencia anterior para cuantificar con número las veces que se obtuvo el resultado.

Resultado	Cuantificación	Frecuencia
1	||||	4
2	$\cancel{||||}$	5
3	|||	3
4	||	2
5	||||	4
6	||	2

La segunda columna puede omitirse al presentar los resultados y queda así:

Resultado	Frecuencia
1	4
2	5
3	3
4	2
5	4
6	2

Actividad 2. Subraya si la tabla corresponde o no con su descripción.

Resultado	Frecuencia
1	2
2	3
3	2
4	4
5	5
6	4

1. $P(3) = \frac{2}{20}$
   - Sí corresponde
   - No corresponde

Resultado	Frecuencia
1	5
2	5
3	3
4	3
5	2
6	2

2. $P(1) = P(2)$
   - Sí corresponde
   - No corresponde

Resultado	Frecuencia
1	4
2	3
3	4
4	2
5	4
6	3

3. $P(3) = \frac{2}{20}$

- Sí corresponde
- No corresponde

Resultado	Frecuencia
1	4
2	3
3	3
4	3
5	5
6	2

4. $P(1) = P(2)$

- Sí corresponde
- No corresponde

Resultado	Frecuencia
1	3
2	3
3	4
4	4
5	3
6	3

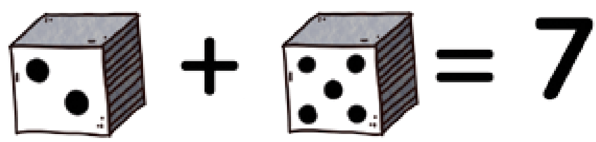
5. Se obtuvo dos veces el número 6.

- Sí corresponde
- No corresponde

Tema 3. Experimento de probabilidad frecuencial con dos dados

Si se tiran los dados y el primero da 2 y el otro da 5, entonces la suma de 2 más 5 es igual a 7.

Es importante aclarar que si en otra tirada el primer dado da 5 y el segundo da 2 se estaría hablando de un caso diferente, puesto que los dados lo son. Por lo tanto $2 + 5$ es diferente de $5 + 2$.



De esta manera, y considerando que una tirada no tiene efecto sobre la otra, es decir, un dado puede caer en 1, 2, 3, 4, 5 o 6 y el otro también puede caer en 1, 2, 3, 4, 5 o 6, el resultado de uno no depende del otro, se puede asegurar que el número de eventos es $6 \times 6 = 36$ ($6^2 = 36$), porque cada dado tiene 6 lados con un número en cada una. Los posibles resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Dado 2					
Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Observa las franjas diagonales de colores, es más probable que salga un 7 (probabilidad de $\frac{6}{36}$) y menos probable que salgan tanto el 2 como el 12 (probabilidad de $\frac{1}{36}$ en cada una).

Volviendo al experimento, se tiene que $N = 20$ porque indica el número de repeticiones del experimento, y S es el número de veces, de las 20 en total, en que la suma de los dados da cierto número.

Recuerda que el número máximo que se puede obtener con la suma de los dos resultados es 12.

Si se quiere calcular la probabilidad frecuencial cuando la suma de los dados fue igual a 7 la fórmula se ve de la siguiente forma:

$$P(S) = \frac{S}{N} = \frac{7}{20}$$

Lo anterior aplica en este caso para los números desde 2 hasta 12, ya que 2 es la suma mínima de los dados y 12 la máxima.

Actividad 3. Calcula la probabilidad para ciertos resultados posibles, en el caso de tirar dos dados.

a) Si en las 20 repeticiones cayó el número 10 tres veces, entonces la probabilidad frecuencial de obtener 10 es:

- $\frac{1}{20}$
- $\frac{3}{20}$
- $\frac{17}{20}$

b) Si en las 20 repeticiones cayó el número 2 dos veces y el número 4 cuatro veces, entonces la probabilidad frecuencial de obtener 2 o 4 es:

- $\frac{2}{20}$
- $\frac{4}{20}$
- $\frac{6}{20}$

c) Si en las 20 repeticiones cayó el número 7 cinco veces, entonces la probabilidad frecuencial de obtener un número distinto a 7 es:

- $\frac{5}{20}$
- $\frac{4}{20}$
- $\frac{15}{20}$

d) Si en las 20 repeticiones no cayó el número 3 ni una sola vez, entonces la probabilidad frecuencial de obtener 3 es:

- $\frac{0}{20}$
- $\frac{3}{20}$
- $\frac{12}{20}$

e) Si en las 20 repeticiones no cayó el número 2 ni una sola vez, entonces la probabilidad frecuencial de obtener un número distinto al 2 es:

- $\frac{15}{20}$
- $\frac{20}{20}$
- $\frac{18}{20}$

PROYECTO

a) Reúnete con las personas que te ayudarán en la organización de *La Katatómbola* y responde las preguntas.

1. ¿Cuántos boletos van a hacer? __________
2. ¿A qué precio darán cada boleto? ______________________________
3. ¿Dónde y cuándo se llevará a cabo *La Katatómbola*?
____
4. ¿Qué otra actividad requieren para el evento?
____

b) Haz los boletos.

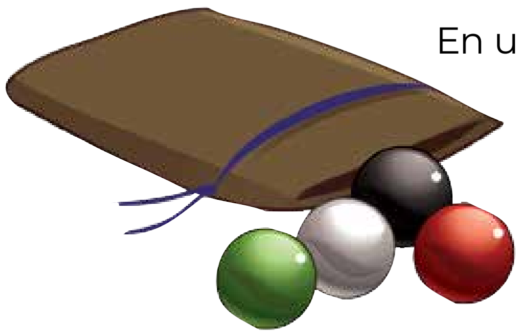
c) Establece los requerimientos mínimos para llevar a cabo la actividad de forma transparente. Toma en cuenta estos criterios:

- Al momento de recibir el pago, debes entregar el boleto.
- Las personas organizadoras no podrán participar en la compra de boletos.
- Se integrarán todos los boletos vendidos en la tómbola.

d) Lleva a cabo la venta de boletos y haz un registro de la misma.

Tema 4. Experimento de probabilidad frecuencial con canicas

Experimento:



En una bolsa oscura hay cuatro canicas: una negra, una blanca, una roja y una verde.

Durante el experimento se extrae una canica, se anota de qué color salió y se repite este proceso 20 veces.

Al tener cuatro canicas en la bolsa, se puede asegurar que la probabilidad de que la canica extraída sea negra es de $\frac{1}{4}$, que sea blanca es de $\frac{1}{4}$, roja de $\frac{1}{4}$ y verde también de $\frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que la canica seleccionada sea de un color u otro es la misma.

En este experimento el número de eventos es 20, por lo que $N = 20$. S cambiará de acuerdo con el color del que se desea conocer su probabilidad frecuencial.

En este ejemplo interesa conocer la probabilidad frecuencial para la canica verde, por eso la fórmula se expresa de la siguiente forma:

$$P(S) = \frac{S}{N} = \frac{\text{Número de veces que se extrajo la canica verde}}{20}$$

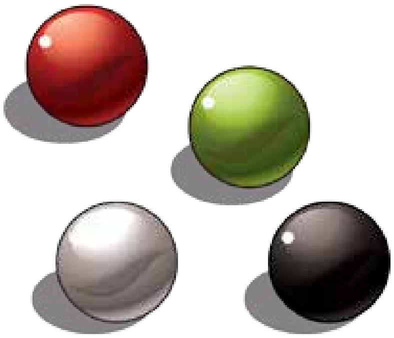
Se debe contar cuántas veces se seleccionó la canica verde y este número se divide entre el número de repeticiones del experimento, que en este caso es 20.

El proceso anterior se aplica para la canica negra, la blanca y la roja. Los datos de las 20 veces que se sacó una canica de la bolsa se van registrando en la tabla. En este caso los resultados son los siguientes.

Resultado	Cuantificación	Frecuencia
Negra	~~IIII~~	5
Blanca	IIII	4
Roja	III	3
Verde	~~IIII~~ III	8

Una vez contados los resultados, se elimina la segunda columna:

Resultado	Frecuencia
Negra	5
Blanca	4
Roja	3
Verde	8



La canica verde tuvo mayor frecuencia, con 8 repeticiones, mientras que la canica roja solo fue sacada 3 veces.

Actividad 4. Marca con una paloma ✓ verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

ORACIONES	V	F
Si se quiere aproximar la probabilidad de obtener 1 canica negra y salieron 3 negras en las 20 repeticiones, entonces S = 5.		
Si en las 20 repeticiones salieron 4 canicas verdes, entonces la probabilidad frecuencial de obtener verdes es $\frac{5}{20}$.		
Si en las 20 repeticiones salieron 3 verdes y 5 rojas, entonces la probabilidad frecuencial de obtener roja es mayor.		
Si en las 20 repeticiones salieron 3 verdes y 5 rojas, entonces la probabilidad frecuencial de obtener roja o verde es $\frac{8}{20}$.		
Siempre es más probable obtener negra a obtener roja.		

CIERRE

En esta secuencia revisaste algunos experimentos con monedas, dados y canicas, y aprendiste los conceptos de aproximación y frecuencia. También aprendiste a registrar frecuencias y conociste cómo funcionan los experimentos de probabilidad frecuencial en los cuales se tienen que sumar los resultados de un tiro simultáneo.

Actividad de cierre. Repasa tus aprendizajes y selecciona la respuesta correcta para completar el texto.

$\frac{5}{20}$	20	11	$\frac{10}{20}$	$\frac{3}{20}$	40	5

a) Si se quiere aproximar la probabilidad de obtener cara y cayeron 11 caras en las 20 repeticiones, S = ________________.

b) Si en las 20 repeticiones cayó el número 10 tres veces, entonces la probabilidad frecuencial de obtener 10 es ____________.

c) En todos estos experimentos las repeticiones no cambiaron, siempre se consideró N = __________.

d) Si en las 20 repeticiones cayeron 10 caras, entonces la probabilidad frecuencial de obtener cara es ____________________.

e) Si en los experimentos se hubiera usado el doble de repeticiones, entonces N = __________.

f) Si en las 20 repeticiones cayó el número 9 cinco veces, entonces para calcular su probabilidad frecuencial S = __________.

g) Si en las 20 repeticiones cayó el número 10 cinco veces, entonces la probabilidad frecuencial de obtener 10 es S = _________.

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Definí el número de boletos a sortear.	
Participé en la selección de los premios.	
Establecí conjuntamente las reglas para el sorteo o rifa.	
Vendí los boletos.	

Secuencia

11

Probabilidad frecuencial y graficación

En esta secuencia aprenderás cómo representar gráficamente los datos obtenidos en un experimento; para ello, elaborarás histogramas que representen la información.

PROYECTO

Trabajarás en las actividades del proyecto *La Katatómbola*. En esta ocasión desarrollarás lo siguiente:

- Cálculo de la probabilidad de obtener los premios.
- Organización de *La Katatómbola*.
- Establecimiento de reglas para otorgar los premios.

El ícono **PROYECTO** distingue las actividades del proyecto.

INICIO

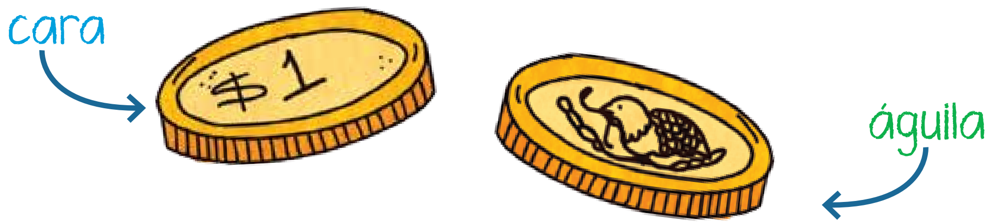
Actividad de inicio. Relaciona con una línea ambas columnas, de acuerdo con lo que corresponda.

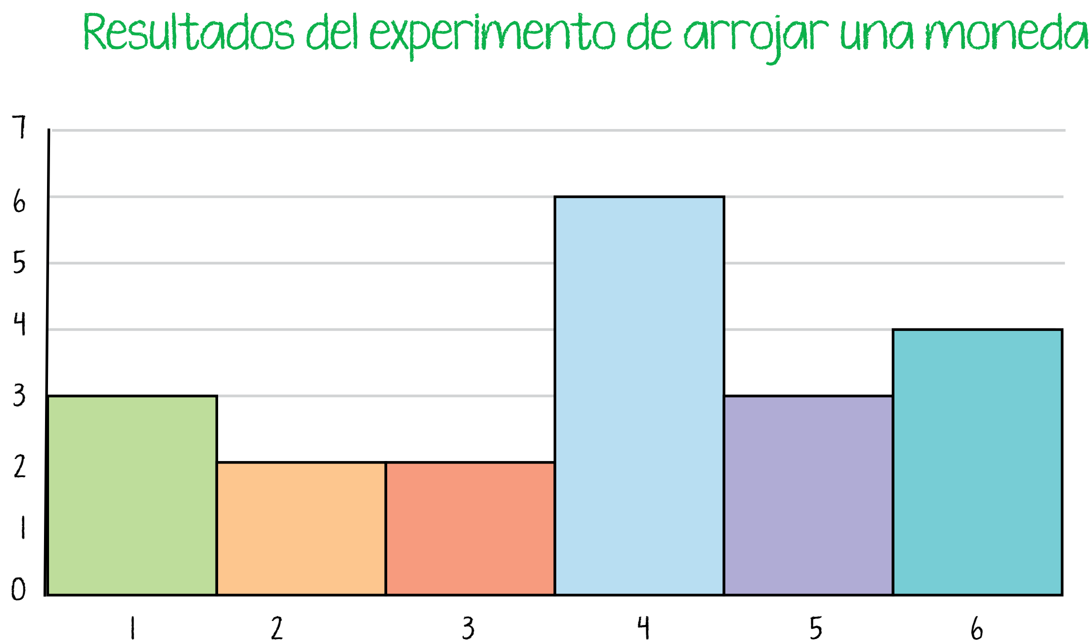
▪ Cantidad de veces que se repite un resultado tras realizar un experimento aleatorio repetidamente.	Repeticiones (N)
▪ Cantidad de veces que se repite todo el experimento, esperando obtener resultados distintos.	Frecuencia (S)
▪ Mide qué tan posible es que ocurra un evento, con base en los datos del experimento.	Probabilidad frecuencial P (S)
▪ Permite calcular la probabilidad frecuencial con base en el conteo de las repeticiones de resultados.	Fórmula $\left(\frac{S}{N}\right)$

DESARROLLO

Tema 1. Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de lanzar una moneda

Una tabla de resultados puede representarse gráficamente para su mejor comprensión. El **histograma** es una gráfica que permite identificar la acumulación, la tendencia, la variabilidad y la distribución de conjuntos de datos.





El **histograma** es un tipo de gráfica de barras que no tiene espacio entre las mismas.

CONEXIONES

Revisa las secuencias 9 y 10 de esta unidad y módulo.

En la secuencia 10 del módulo *Pensamiento matemático 3* estudiaste el histograma. Regresa a ella por si tienes dudas.

La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia del valor que representa. Es decir, la barra más alta representa el valor o el subgrupo de valores que tuvo mayor número de repeticiones.

En el **eje vertical** de este tipo de gráfica se indican las frecuencias o repeticiones, y en el eje horizontal los resultados.

Observa el orden adecuado para graficar un experimento aleatorio:

CONEXIONES

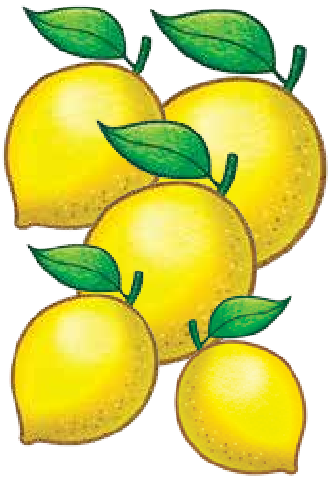
En las secuencias de la unidad 3 del módulo *Pensamiento mantemático 3*, y en las secuencias de la unidad 2 del módulo *Pensamiento matemático 4*, revisaste los ejes *x* y *y*.

1. Realizar el experimento aleatorio.
2. Anotar los resultados del experimento, puede ser en una tabla de frecuencias.
3. Dibujar los ejes *x* y *y* según el número de resultados y la repetición máxima.
4. Colocar etiquetas a los ejes.
5. Dibujar rectángulos sobre cada elemento del eje *x* con base en su frecuencia.

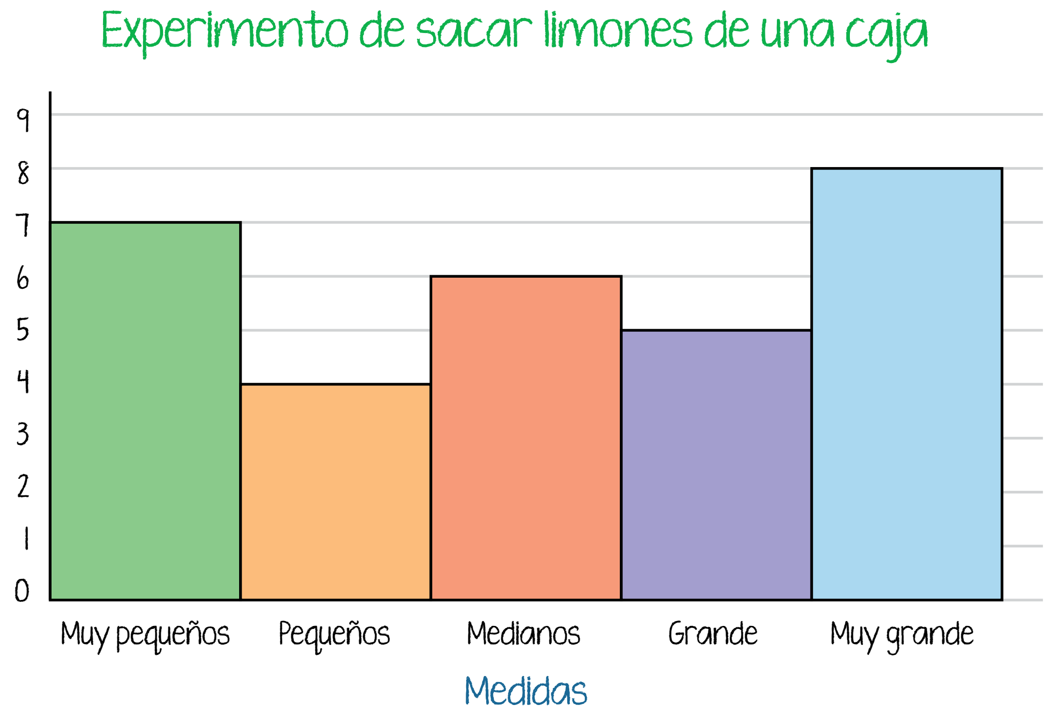
Para construir el **histograma** de un experimento aleatorio se anotan los resultados en la tabla de frecuencias. En este caso se trata de sacar al azar 30 limones de una caja con 100 piezas, de las cuales se tienen 20 de cada tamaño: muy pequeños, pequeños, medianos, grandes y muy grandes.

Se hace el histograma, considerando en el eje x los resultados obtenidos y en el eje y las repeticiones o frecuencia.

Limones		
Resultados	**Conteo**	**Frecuencia**
Muy pequeños	~~IIII~~ II	7
Pequeños	IIII	4
Medianos	~~IIII~~ I	6
Grandes	~~IIII~~	5
Muy grandes	~~IIII~~ III	8

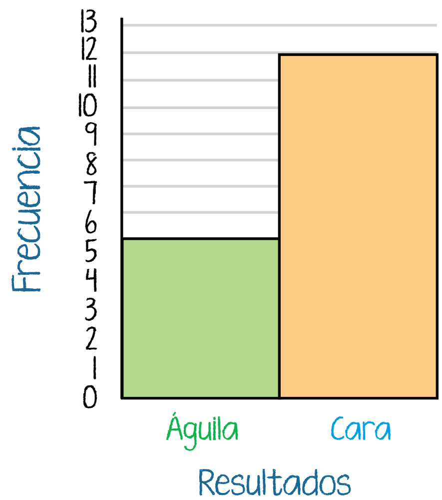


Una vez trazado, el histograma queda así.

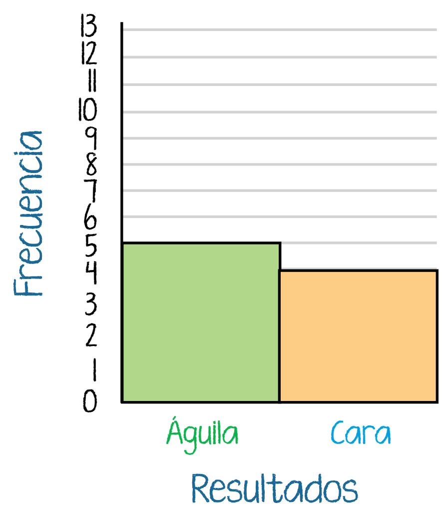


La gráfica está representando los resultados obtenidos en el experimento de sacar 30 veces un limón y registrar los resultados.

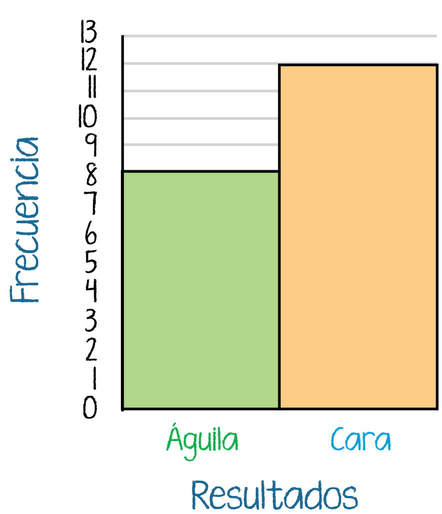
Actividad 1. Analiza los histogramas y escribe si se obtuvo un mayor número de veces que cayó en águila o en cara.



Mayoría de: ____________________



Mayoría de: ____________________



Mayoría de: ____________________

PROYECTO

Ya que tienes todas las bases para poner en marcha *La Katatómbola* haz uso de tus conocimientos sobre probabilidad para saber la posibilidad de ganar que tiene cada una de las personas participantes.

a) Responde las preguntas.

1. ¿A cuántas personas les vendiste un boleto?

____

2. ¿Qué probabilidad hay de que alguna de ellas gane?

____

____

3. Si se vendieron la mitad de los boletos, ¿qué oportunidades tiene cada persona participante de ganar?

____

____

4. Si una participante compra más de un boleto, ¿sus posibilidades de ganar aumentan o siguen siendo las mismas? ¿Sí, no y por qué?

____

____

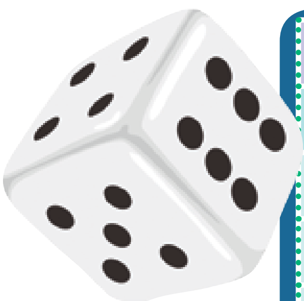
____

____

Tema 2. Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de lanzar un dado

Ya viste cómo graficar un experimento aleatorio con dos resultados, pero también puede hacerse con más resultados. Observa cómo se grafica un experimento aleatorio con un dado.

Para comenzar, se retoman los resultados de tirar un dado.

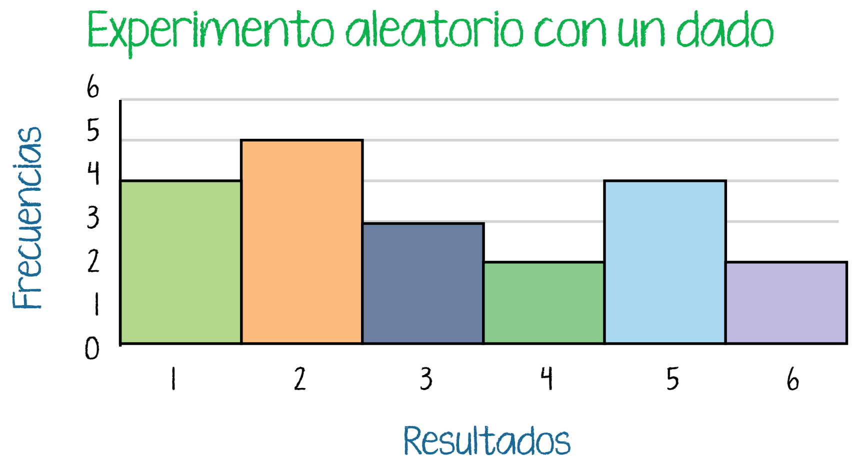


Experimento aleatorio con un dado		
Resultados	**Cuantificación**	**Frecuencia**
1	IIII	4
2	卌	5
3	III	3
4	II	2
5	IIII	4
6	II	2

Se elimina la columna de cuantificación, útil para sacar los totales de la frecuencia pero no para presentar los resultados.

Dado	
Resultados	**Frecuencia**
1	4
2	5
3	3
4	2
5	4
6	2

Una vez que ya se cuenta con la tabla, se grafica el histograma.



Actividad 2. Analiza la gráfica o la tabla y subraya la opción que la completa correctamente.

1.

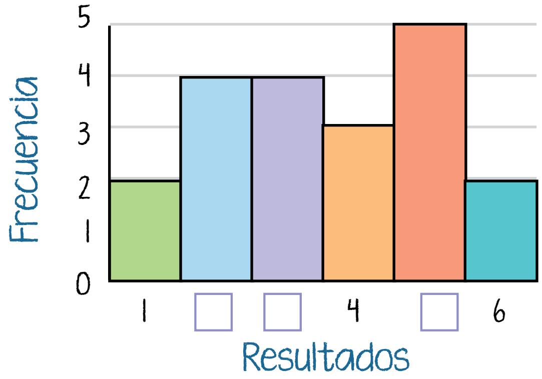
- 5, 5
- 3, 4
- 3, 5

2. Tabla de la gráfica 1

Resultados	Frecuencia
1	☐
2	2
3	5
4	☐
5	3
6	3

- 3, 5
- 3, 4
- 4, 4

3. Gráfica 2



- 3, 4, 6
- 2, 3, 6
- 2, 4, 6
-

4. Tabla de la gráfica 2

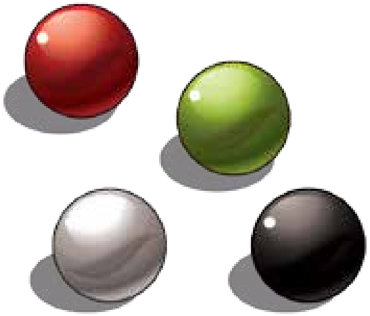
Resultados	Frecuencia
1	
2	4
3	4
4	3
5	
6	2

- 2, 5
- 2, 4
- 3, 5

Tema 3. Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de extraer canicas

Ahora retomamos el experimento que consistió en sacar de una bolsa oscura una canica, registrar su color, volverla a introducir en la bolsa y repetir para ajustar un total de 20 veces.

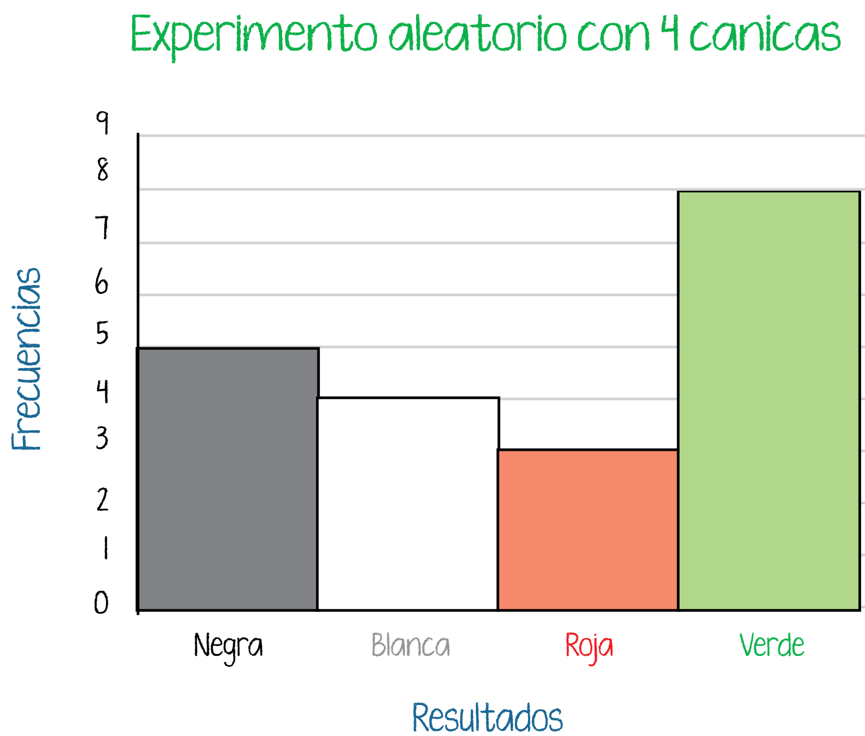
Experimento aleatorio con 4 canicas		
Resultado	**Cuantificación**	**Frecuencia**
Negra	~~IIII~~	5
Blanca	IIII	4
Roja	III	3
Verde	~~IIII~~ III	8



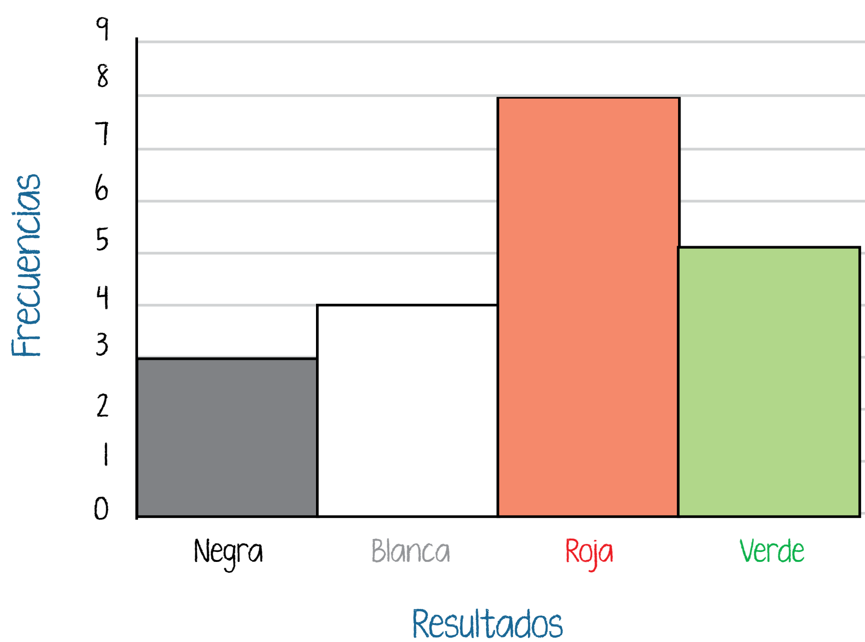
También en esta ocasión se elimina la columna del centro.

Canicas	
Resultado	**Frecuencia**
Negra	5
Blanca	4
Roja	3
Verde	8

Una vez que ya se cuenta con la tabla, se procede a graficar el **histograma**, se aprecia que la mayor superficie, y por lo tanto la mayor frecuencia, correspondió a la canica verde, que tuvo 8 repeticiones, mientras que la roja solo tuvo 3.



Actividad 3. Con base en la siguiente gráfica, contesta las preguntas.



1. ¿Cuál color de canica tiene una probabilidad frecuencial menor?
   - Blanca
   - Negra
   - Verde

2. ¿Cuántas veces salió la canica verde durante el experimento?
   - 4
   - 5
   - 8

3. ¿Cuál color de canica tiene una probabilidad frecuencial de $\frac{4}{20}$?
   - Blanca
   - Negra
   - Verde

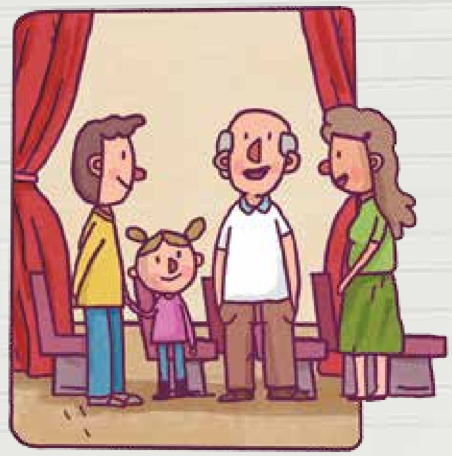
4. ¿Cuáles dos colores de canica, al sumarse, no superan en frecuencia a la roja?
   - Blanca y verde
   - Negra y verde
   - Blanca y negra

PROYECTO

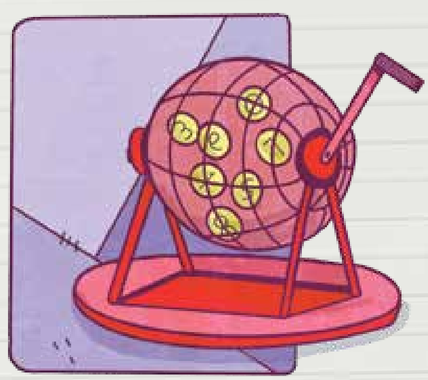
Organización del evento

- Elijan el rol de cada persona en el evento:

1. Recibimiento de personas.
2. Dar indicaciones.
3. Animación.



4. Hacer el sorteo.

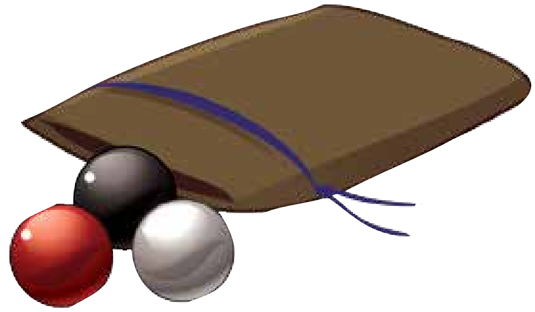


5. Establecer las reglas para otorgar los premios.

En esta secuencia utilizaste los datos que ya habías ordenado en tablas para graficar la información de experimentos aleatorios en histogramas para facilitar el manejo de datos.

Actividad de cierre. Elabora paso a paso un histograma con los datos proporcionados.

a) De una bolsa con una canica roja, otra blanca y otra negra, realiza el experimento de sacar una canica, registrar su color, volverla a introducir en la bolsa y repetir, hasta ajustar un total de 30 veces.



b) Escribe tus resultados en la tabla.

Experimento aleatorio con 3 canicas		
Resultado	**Cuantificación**	**Frecuencia**
Roja		
Blanca		
Negra		

c) Responde, ¿qué modificación se suele hacer a la gráfica para su presentación?

d) Haz dicha modificación en el espacio siguiente.

e) Grafica los datos de la tabla en un histograma.

f) Responde las preguntas.

1. ¿Cuál fue la canica que se extrajo más veces?

____

2. ¿Cuál fue la canica que se extrajo menos veces y cuántas fueron?

____

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Cálculo de la probabilidad de obtener los premios.	
Organización de *La Katatómbola*.	
Establecimiento de reglas para otorgar los premios.	

Secuencia

12

Probabilidad frecuencial e interpretación de resultados

En esta secuencia reconocerás cómo se interpreta la información proporcionada por los experimentos aleatorios que has revisado en las secuencias previas. También identificarás su aplicación en la vida cotidiana.

PROYECTO

Concluirás el proyecto *La Katatómbola*. Las actividades a desarrollar en esta secuencia se enlistan a continuación:

- Realización del evento y el convivio pacífico.
- Acuerdo sobre el uso que se dará al dinero recabado.

Recuerda que utilizamos el ícono **PROYECTO** para distinguir las actividades del proyecto.

INICIO

Actividad de inicio. Completa el siguiente texto con las palabras correctas, reescribiendo en el espacio en blanco una de las tres opciones que se muestran dentro de los paréntesis.

Al graficar los resultados de un experimento ______________________ (químico / físico / aleatorio), en el eje horizontal se escriben______________________ (las frecuencias / las repeticiones totales / las etiquetas) y en el eje vertical van ______________________ (las frecuencias / las repeticiones totales / las etiquetas).

Mientras más grande sea la probabilidad frecuencial que se obtiene para un resultado, ______________________ (más probable / menos probable / más grande) será dicho resultado.

Es importante recordar que las predicciones o resultados ______________________ (nunca fallan / siempre fallan / son aproximados).

DESARROLLO

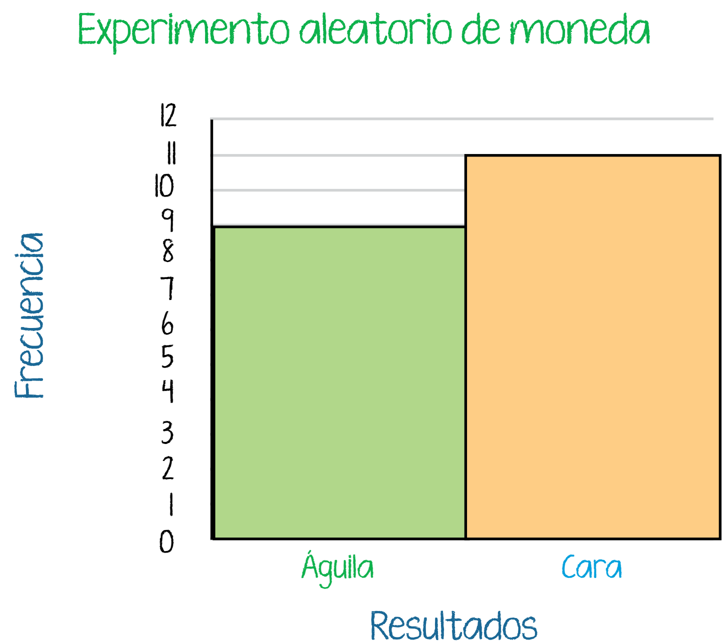
Tema 1. Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de lanzar una moneda

Las gráficas resumen de forma visual, compacta y simple, una gran cantidad de datos y al mismo tiempo apoyan para interpretar y explicar algún experimento o fenómeno. Junto con las tablas, proporcionan información que debe ser interpretada.

Una vez que realizaste los experimentos aleatorios con moneda, dado y canicas, hiciste tablas o tabulaste los resultados y graficaste con un histograma la información obtenida, queda por realizar la interpretación de los resultados. Los ejemplos vistos hasta ahora han servido para observar las reglas básicas de la probabilidad.

Moneda	
Resultado	**Frecuencia**
Águila	9
Cara	11

Observa de nuevo los resultados del experimento realizado con la moneda.



De 20 lanzamientos de moneda, 9 veces cayó águila y 11 veces cayó cara. Esto indica que se obtuvo una probabilidad de $\frac{9}{20}$ para el caso de águila y de $\frac{11}{20}$ en el caso de cara. Esto, en términos de **probabilidad frecuencial**, indica lo siguiente:

Probabilidad (águila) $= \frac{9}{20} = 0.45$

En términos de porcentaje es 45%

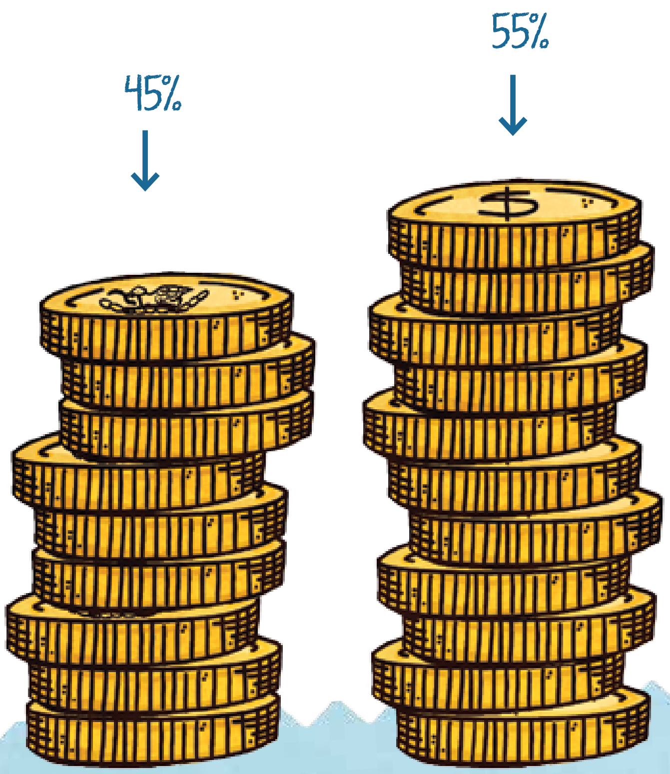
Probabilidad (cara) $= \frac{11}{20} = 0.55$

En términos de porcentaje es 55%

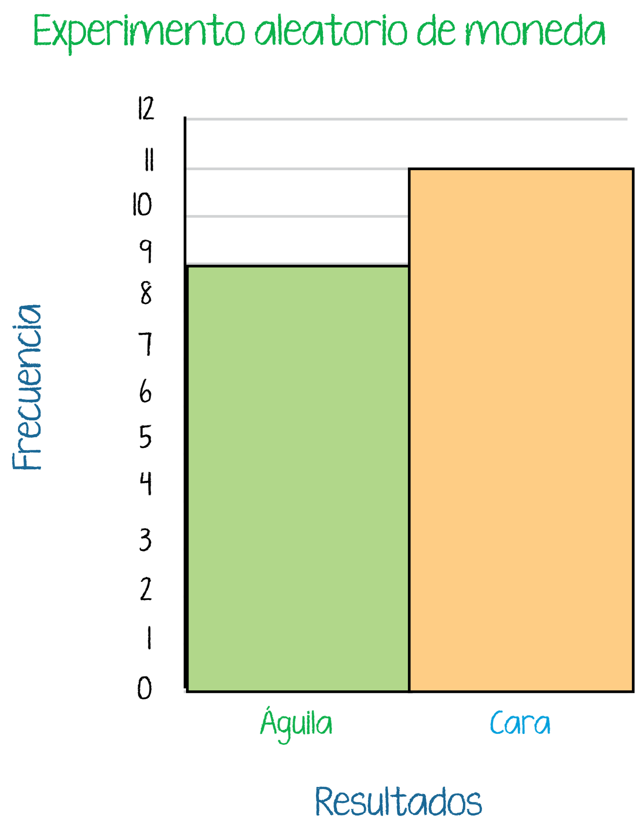
Recuerda que la probabilidad se expresa en valores de 0 a 1: 0 es la probabilidad de que un evento nunca ocurra, mientras que 1 es la probabilidad de que dicho evento siempre suceda.

Entonces, entre más cercana esté una probabilidad del 0 será menor, y será mayor cuanto más cercana sea al 1.

En el caso del lanzamiento de una moneda, ambos resultados están cerca de la mitad, es decir, tuvieron casi la misma probabilidad de suceder, pues uno es de 45% y otro es de 55%.



Se aprecia a simple vista en el histograma que tuvieron casi la misma probabilidad de suceder.



Esta probabilidad es frecuencial porque se obtuvo de un experimento práctico; puedes ver que los resultados son muy similares a los que predice la probabilidad clásica, para la cual en un experimento aleatorio con dos posibles resultados la probabilidad es de 50% para cada uno, siempre y cuando ambos tengan las mismas posibilidades de que sucedan.

En otras palabras, con este experimento se observa que la teoría sí se verifica en la realidad; sin embargo, la probabilidad no proporciona un número exacto sino una aproximación, y en ocasiones la teoría no se refleja en un experimento hasta que se repite muchas más veces.

Actividad 1. Realiza tu propio experimento de probabilidad, ahora con fichas de dominó que encontrarás en la página siguiente.

a) El experimento consiste en sacar 30 veces una ficha y considerar solamente aquellas que tengan el número 6 en alguna de sus mitades.

1. Recorta tus fichas, voltéalas del lado que no tiene numeración y revuélvelas.

2. Saca 1 ficha, registra el resultado en la tabla.

Dominó	
Resultado	**Frecuencia**
Número 6 en alguno de sus lados	
Otros números	

CÓDIGO COMÚN

Dominó: juego de mesa formado por 28 fichas con doble numeración del 0 al 6.

3. Regrésala, revuelve una vez más y repite el proceso hasta completar 30 veces.

4. Elabora el histograma con tus resultados.

CÓDIGO COMÚN

Mula: en dominó, ficha que tiene el mismo número en ambas mitades.

b) Calcula las probabilidades y los porcentajes.

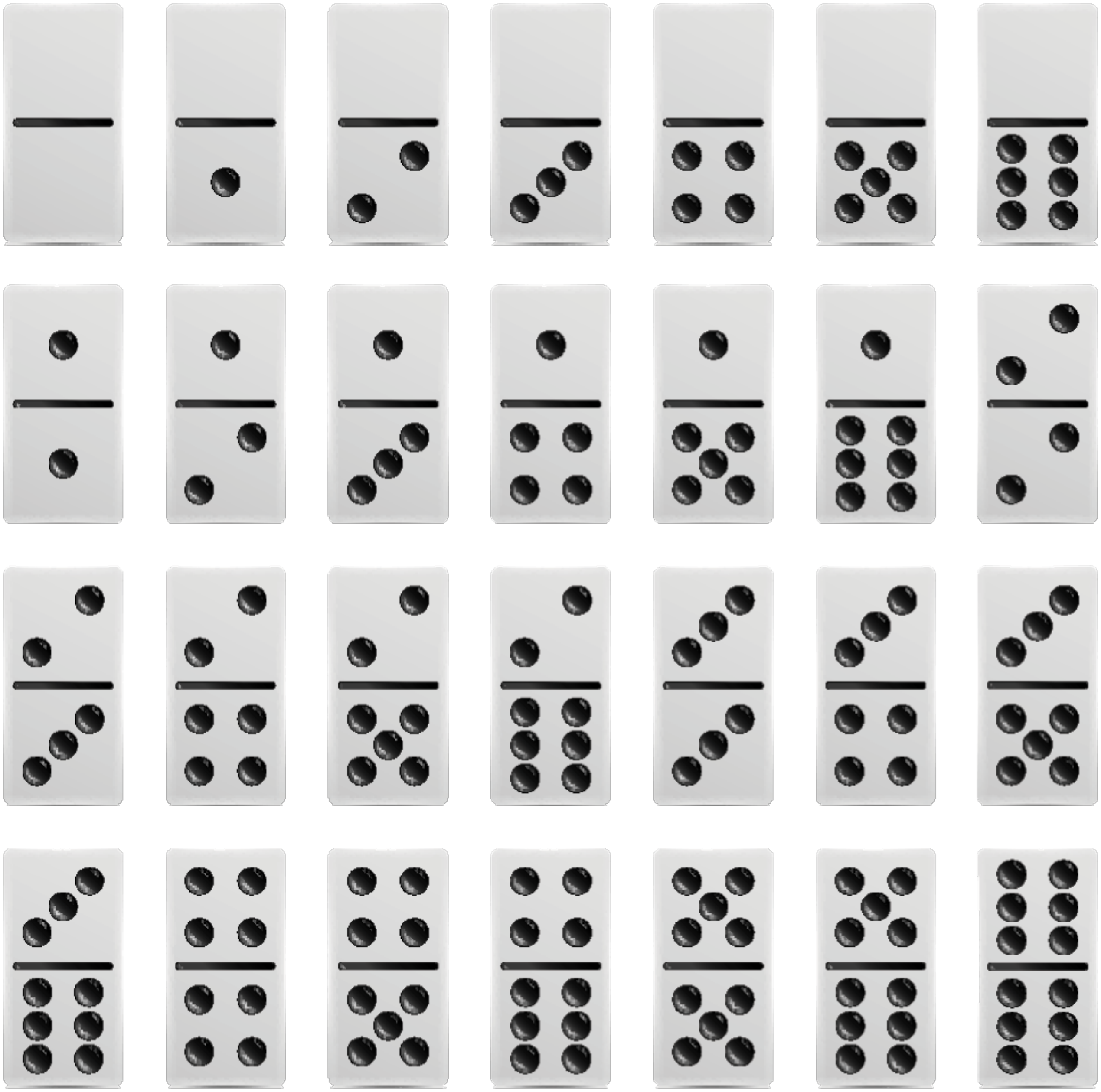
- Total de fichas de dominó = ________________
- Total de fichas con el número 6 en alguna de sus mitades: ________________
  Probabilidad (número 6) = ________________
- En términos de porcentaje es: ________________
- Probabilidad (otros números) = ________________
- En términos de porcentaje es: ________________

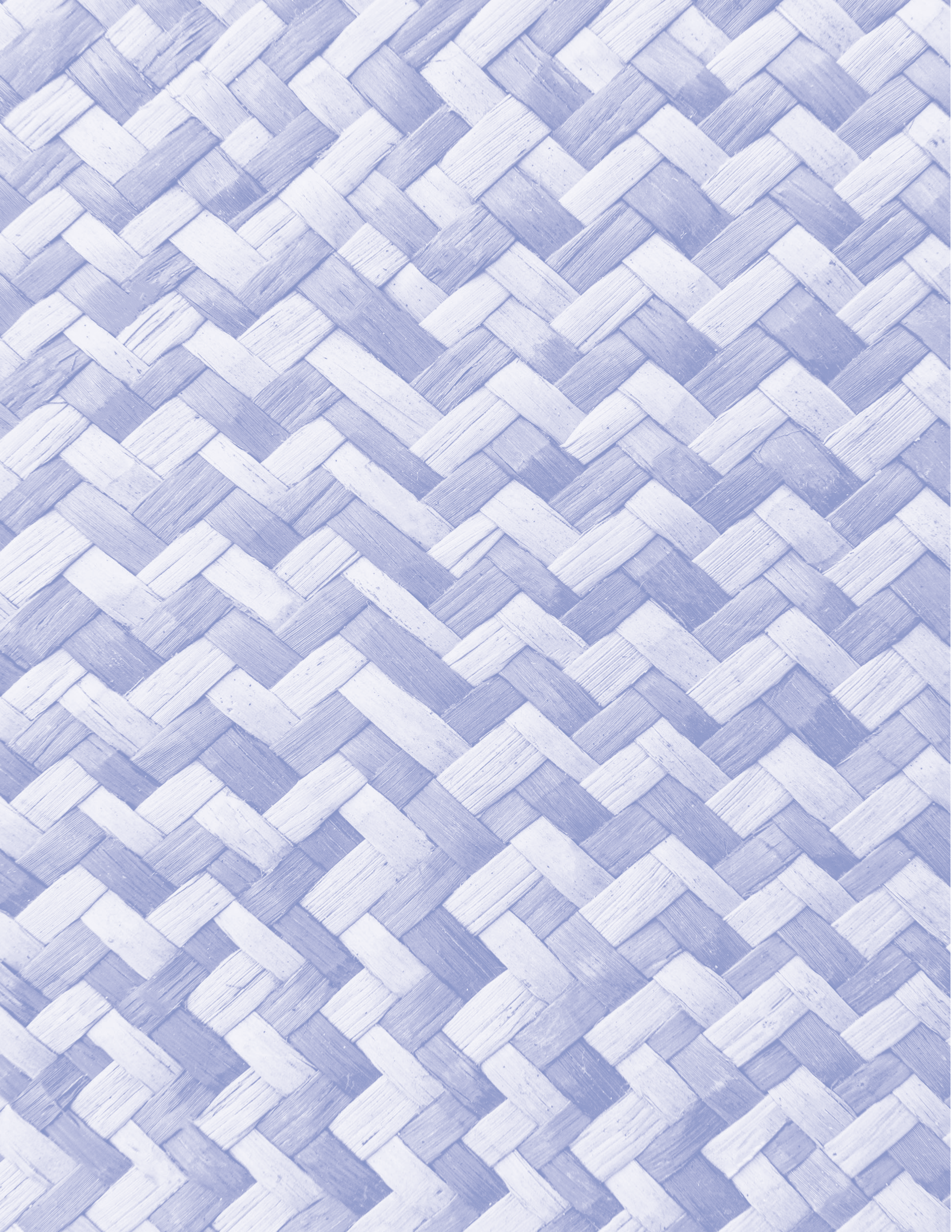
c) Reúnete con familiares, amistades o personas del *Círculo de estudio* para realizar experimentos con tus fichas de dominó, verás que puedes hacer varias combinaciones.

RECORTABLE 2

Fichas de dominó

- Recorta con cuidado las fichas. Puedes forrarlas o enmicarlas para que se conserven mejor.



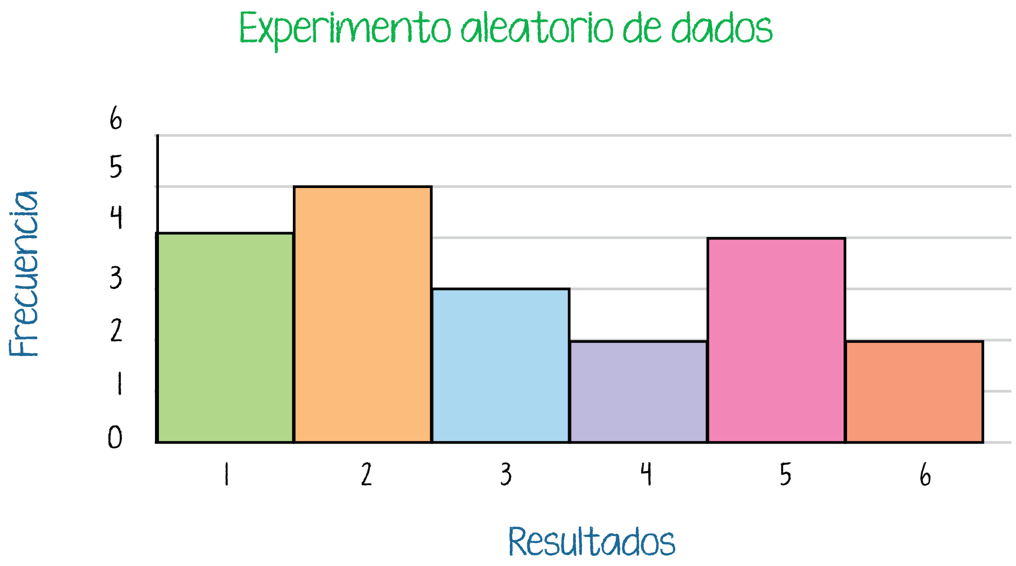


Tema 2. Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de lanzar un dado

Observa en los resultados de la tabla y el histograma que, aunque fueron más o menos parejos, el lado con el número 2 tuvo mayor frecuencia en los resultados, con 5 de 20 lanzamientos, seguido por los lados con 1 y 5, que tuvieron 4 resultados de 20 cada uno.

En cambio, los números 4 y 6 tuvieron menor frecuencia al caer dos veces cada uno. El número 3 fue el único en caer 3 de 20 veces.

Dado	
Resultados	Frecuencia
1	4
2	5
3	3
4	2
5	4
6	2



Expresado en valores numéricos y de mayor a menor frecuencia:

$$P(2) = \frac{5}{20} = 0.25 \text{ o } 25\%$$

$$P(1) = \frac{4}{20} = 0.2 \text{ o } 20\%$$

$$P(5) = \frac{4}{20} = 0.2 \text{ o } 20\%$$

$$P(3) = \frac{3}{20} = 0.15 \text{ o } 15\%$$

$$P(4) = \frac{2}{20} = 0.1 \text{ o } 10\%$$

$$P(6) = \frac{2}{20} = 0.1 \text{ o } 10\%$$

Recuerda que la suma de estas probabilidades debe dar **1 o 100% para porcentajes**.

Al revisar esta información, se puede interpretar lo siguiente:

- Los resultados son más o menos similares pues, aunque el número 2 fue el lado con más repeticiones, no se observa una tendencia hacia este resultado; más bien, como se aprecia en el histograma, los resultados son relativamente parejos.
- Se pueden establecer relaciones entre los resultados. Por ejemplo, la probabilidad de que salgan los números 4 y 6 por separado es de 10%, pero si las sumas, ya es de 20% (10 + 10 = 20), misma probabilidad de que salga el número 1 o el número 5.

Así, puede decirse que la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento se tenga como resultado cualquier número entre 4, 6, 1 y 5 es del 60%, porque sumaste sus probabilidades.

Esto es válido para cualquier combinación que se desee hacer.
10% + 10% + 20% + 20% = 60%

Actividad 2. Revisa la tabla y haz lo que se te indica.

Dado	
Resultados	**Frecuencia**
1	2
2	5
3	4
4	2
5	4
6	3

a) Elabora un histograma con los datos de la tabla.

b) Expresa en valores numéricos y de mayor a menor frecuencia los datos de la tabla.

- P(   ) = ______________________
- P(   ) = ______________________
- P(   ) = ______________________
- P(   ) = ______________________
- P(   ) = ______________________
- P(   ) = ______________________

PROYECTO

TIC

Revisa el siguiente video que explica sobre la probabilidad en este tipo de juegos.
https://bit.ly/3XBCMCg

Para finalizar el proyecto de la unidad, lleven a cabo el evento de *La Katatómbola*.

1. Cada persona ingresará su boleto a la urna o caja, quedándose con el talón del boleto.

2. Alguna persona del público sacará los tres boletos ganadores.
3. Las tres personas ganadoras serán cuestionadas sobre si deciden cambiar su premio por otro.

4. Quien desee cambiarlo, entrará a la katafixia. Responde:

- Si entra a la katafixia ¿qué probabilidades tiene de obtener un premio mejor?

____

- Si ya se destapó una de las opciones y no está el premio, ¿cuál es la probabilidad de ganar?, ¿por qué?

____

____

5. Entrega de premios.

6. Convivencia.

7. Contar ganancias y determinar para qué se usarán.

Sobre este último punto, considera que realizar eventos de este tipo puede ayudar a reunir fondos para cubrir las necesidades que se tengan en la colonia o comunidad, entre ellas algunas de las mencionadas en otros proyectos de los módulos de secundaria; así como las opciones que ya planteaste para este proyecto en secuencias pasadas.

CONEXIONES

Revisa los proyectos de los módulos *Pensamiento matemático* 3, 4 y 5, pueden utilizar lo reunido para alguno de estos.

8. Escribe el uso que tendrá el dinero reunido.

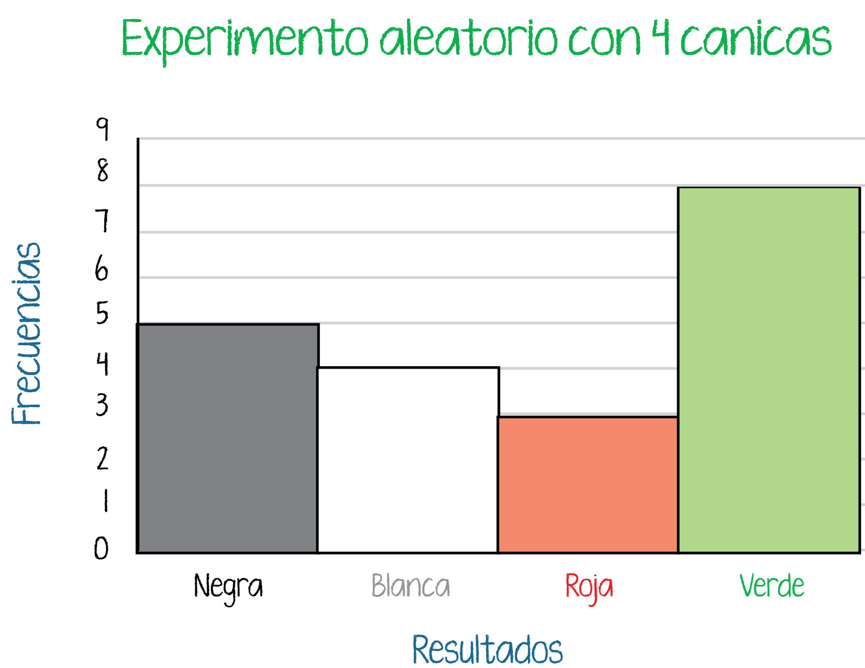
____

Tema 3. Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de extraer una canica

Lee los resultados del experimento de extraer una canica de la bolsa oscura y establece una conexión entre los experimentos realizados y el uso de la probabilidad en la vida cotidiana.

Esta es la información obtenida con el experimento de extraer 20 veces una canica de la bolsa:

Canicas	
Resultados	**Frecuencia**
Negra	5
Blanca	4
Roja	3
Verde	8



En este experimento, a diferencia de los anteriores, puede verse que hay un resultado que sobresale del resto: la canica verde, la cual tuvo 8 de 20 ($\frac{8}{20}$) repeticiones, tres más que la negra, que quedó en segundo lugar.

Sin embargo, por ser 20 la cantidad de repeticiones en este experimento, todavía son pocas para establecer una tendencia hacia la canica verde. Es necesario repetir el experimento un mayor número de veces para dar certeza a este resultado.

La probabilidad frecuencial obtenida en este experimento es la siguiente:

$$P(\text{verde}) = \frac{8}{20} = = 0.4 \text{ o } 40\%$$

$$P(\text{negra}) = \frac{5}{20} = 0.25 \text{ o } 25\%$$

$$P(\text{blanca}) = \frac{4}{20} = 0.2 \text{ o } 20\%$$

$$P(\text{roja}) = \frac{3}{20} = 0.15 \text{ o } 15\%$$

Al interpretar esta información se pueden hacer varios enunciados, como los siguientes.

En este experimento aleatorio el resultado más frecuente fue la canica verde, con 40% de repeticiones. Por otra parte, la canica con menor frecuencia fue la roja, con 15%, cinco puntos porcentuales por debajo de la más próxima, que fue la de color blanco (20%).

Los resultados de la canica negra y blanca, juntos, suman 45%, porcentaje un poco mayor que el más alto, correspondiente a la canica verde.

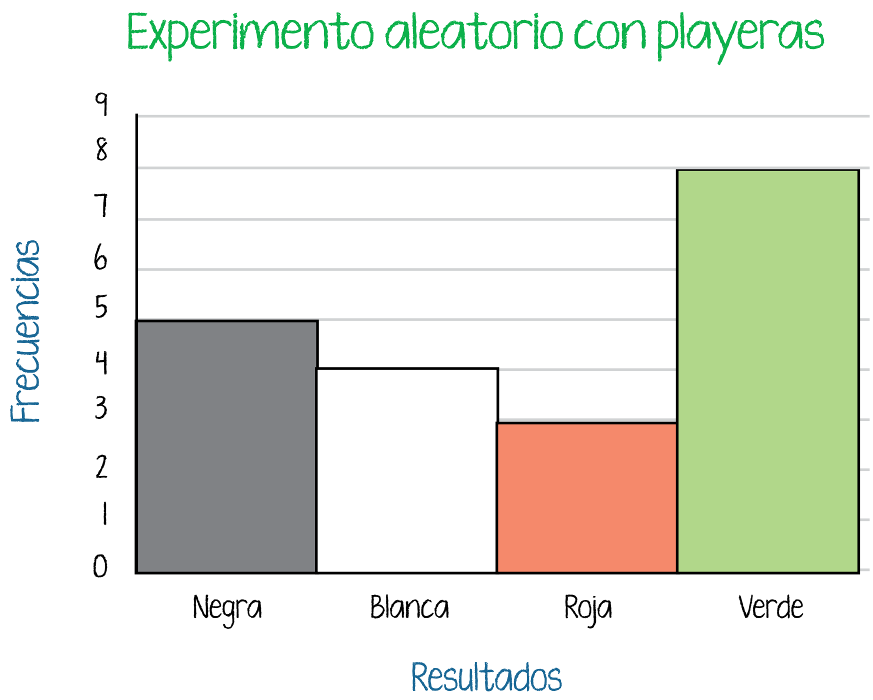
Si se juntan las probabilidades de obtener ambas canicas, la negra y la blanca, de acuerdo con este experimento es un poco más probable extraerlas que la canica verde.

Si la canica verde tuvo probabilidad frecuencial de 0.4, el resto de canicas tienen 0.6 de probabilidad de ser extraídas, recuerda que todos los valores deben sumar 1.

¿Estos experimentos con monedas, dados y canicas tienen aplicación en la vida cotidiana?

Para responder esta pregunta, regresa a la tabla de datos y al gráfico anterior, suponiendo que, en lugar de ser producto de un experimento sobre canicas, los datos son resultado de una encuesta en la que se pregunta a las personas cuál es el color de camiseta que prefieren para el equipo de futbol que representará a México en un torneo amistoso internacional.

¿Cuál es el color de camiseta que prefieren?



La encuesta muestra la preferencia de la camisa verde sobre el resto. Para que el resultado sea confiable, la encuesta tendría que aplicarse a un número mucho mayor de personas.

Si se tratara de los resultados de una encuesta para decidir el color de playera del equipo de futbol rápido de una empresa donde trabajan 150 personas, los resultados serían más confiables para predecir los gustos de quienes laboran en ella.

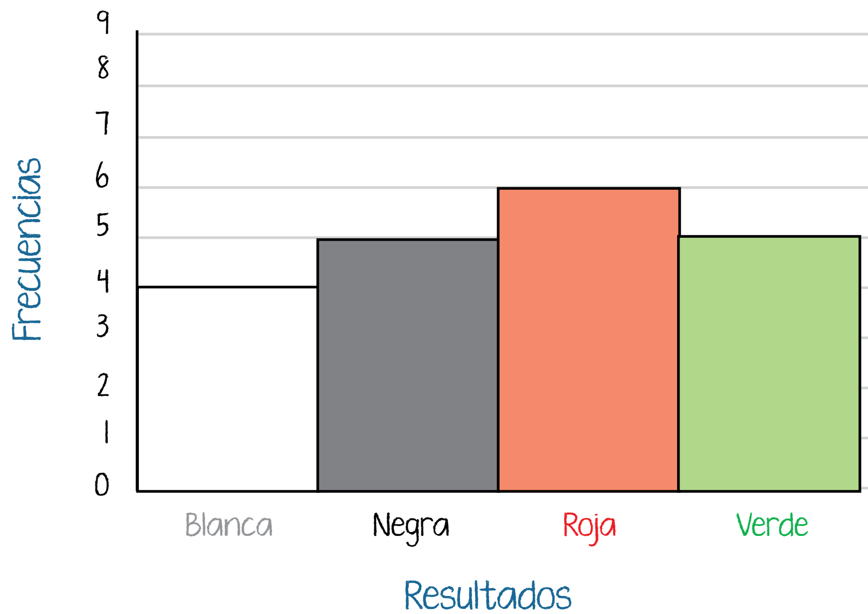
Para que el resultado de una encuesta sea confiable, personal especializado en análisis de datos –actuarios, estadísticos o matemáticos– diseña el experimento y determina el número de personas necesario para aplicarlo, con base en cálculos estadísticos y de probabilidad.

Un ejemplo son las encuestas realizadas por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

Otra aplicación puede ser determinar la probabilidad de que alguna maquinaria produzca piezas defectuosas mediante la recopilación y el análisis de datos; solo que en la fábrica se contarán las defectuosas y no defectuosas para determinar su frecuencia y, con ella, la probabilidad del evento.

Estos son algunos casos donde puedes reconocer el valor de la información arrojada tanto por la probabilidad clásica como por la probabilidad frecuencial.

Actividad 3. Observa la gráfica y responde las preguntas.



a) ¿Se puede asegurar que es más probable sacar canica roja que canica verde? ¿Por qué?

____

____

____

b) ¿Podrías asegurar cuál canica es menos probable de sacar? ¿Por qué?

____

____

____

c) ¿Qué podrías hacer para tener mayor confianza en tus análisis?

____

____

____

CIERRE

En esta secuencia aprendiste a interpretar datos de tablas y gráficas sobre probabilidad frecuencial, construidas en secuencias anteriores, así como a analizar la información que proporcionan. Ahora tienes nociones de probabilidad que pueden ayudarte a entender situaciones donde intervenga el azar.

Actividad de cierre. Marca con una paloma ✓ si la frase es verdadera (V) o falsa (F).

Frases	V	F
Con 20 repeticiones siempre se sabe el resultado más probable de un experimento aleatorio.		
Mientras más repeticiones, más confiables los resultados de un experimento aleatorio.		
La probabilidad puede aplicarse para entender situaciones donde interviene el azar.		
Si un posible resultado tiene una probabilidad frecuencial de $\frac{0}{20}$, quiere decir que no puede ocurrir.		

PROYECTO

En la siguiente lista de cotejo marca con una paloma ✓ las actividades que sí realizaste.

Actividades	Sí
Realicé el evento procurando la convivencia pacífica.	
Acordé con otras personas el uso que se dará al dinero recabado.	

Si te falta alguna actividad
Ponte al corriente
Si te falta alguna actividad

Autoevaluación

Mi reflexión sobre el módulo

Te invitamos a reconocer lo que aprendiste a lo largo de este módulo, su importancia en la vida cotidiana, las dificultades que afrontaste y estrategias para mejorar.

- Reflexiona y escribe lo que se te pide.

a) Describe la utilidad de los aprendizajes desarrollados en el módulo en tus actividades diarias.

____
____
____

b) Analiza e identifica las habilidades y conocimientos que desarrollaste o mejoraste con los contenidos del módulo. Anota tus respuestas en la tabla.

Resolución de problemas mediante ecuaciones lineales.	
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante los métodos de suma y resta y sustitución.	
Resolución de ecuaciones cuadráticas.	
Solución de operaciones con el teorema de Pitágoras.	
Definición de la probabilidad frecuencial y realización de experimentos.	
Interpretación y graficación de resultados de experimentos de probabilidad frecuencial.	

c) Escribe tres ejemplos de aprendizajes que te ayudaron a resolver situaciones cotidianas con ayuda de las matemáticas.

____

____

____

d) Explica cómo lo que aprendiste fortalece el ejercicio de tu derecho al acceso a la información confiable que puedes discriminar y utilizar tanto para tu vida cotidiana como durante tu participación democrática en la comunidad.

____

____

____

e) Anota los aprendizajes que debes reforzar y cómo puedes hacerlo.

Puedo reforzar...	¿Cómo lo lograré?

- Comparte tus reflexiones con amistades, familiares o las personas del *Círculo de estudio*, así como las estrategias para mejorar.

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN DE LOS ADULTOS

Módulo

Pensamiento matemático 5

SECUNDARIA

Hoja de avances

Nombre de la persona adulta

Apellido paterno | Apellido materno | Nombres

RFE o CURP

Marca con una paloma ✓ los contenidos que hayas completado y comprendido satisfactoriamente en cada unidad.

Unidad 1

Secuencia 1

- Las ecuaciones y las ecuaciones lineales ○
- Resolución de problemas a partir de una ecuación ○

Secuencia 2

- Resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas ○
- Método de suma y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales ○
- Método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales ○
- Problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas ○

Secuencia 3

- Método de graficación para resolver sistemas de ecuaciones lineales ○
- Resolución de problemas con el método de graficación ○

Secuencia 4

- La ecuación cuadrática ○
- Tres formas en que se representa una ecuación cuadrática ○
- La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas ○
- Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general ○
- Resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones cuadráticas ○

Unidad 2

Secuencia 5

- Ángulo: definición y clasificación ○
- Rectas ○
- Propiedades del triángulo rectángulo ○
- Construcción de un triángulo rectángulo ○

Secuencia 6

- Triángulos semejantes ○
- Relación matemática entre los triángulos semejantes ○
- Construcción de dos triángulos semejantes ○
- Problemas cotidianos que se resuelven con la semejanza de triángulos ○

Secuencia 7

- Pitágoras ○
- Validación del teorema ○
- Demostración gráfica del teorema de Pitágoras ○
- Uso del teorema de Pitágoras en la solución de problemas ○

Secuencia 8

- Triángulos rectángulos que puedes medir en el entorno ○
- El teorema de Pitágoras y su representación gráfica ○
- Situaciones cotidianas que se resuelven con el teorema de Pitágoras

Unidad 3

Secuencia 9

- La probabilidad frecuencial y su fórmula ○
- Práctica de probabilidad frecuencial ○

Secuencia 10

- Experimento de probabilidad frecuencial con una moneda ○
- Experimento de probabilidad frecuencial con un dado ○
- Experimento de probabilidad frecuencial con dos dados ○
- Experimento de probabilidad frecuencial con canicas ○

Secuencia 11

- Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de lanzar una moneda ○
- Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de lanzar un dado ○
- Tabulación y graficación de los resultados obtenidos en el experimento de extraer canicas ○

Secuencia 12

- Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de lanzar una moneda ○
- Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de lanzar un dado ○
- Interpretación de los resultados del experimento aleatorio de extraer una canica ○

Hago constar que completó satisfactoriamente los contenidos de este módulo.

Nombre de la persona asesora: ____________________

Firma: ____________________ Fecha: ____________________

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN DE LOS ADULTOS

Módulo

Pensamiento matemático 5

SECUNDARIA
Hoja de avances

Anota, por cada unidad, los aprendizajes que te resultaron más significativos y su aplicación en la vida cotidiana.

¿Qué aprendí?	¿Para qué me sirve?
Unidad 1	**Unidad 1**
Unidad 2	**Unidad 2**
Unidad 3	**Unidad 3**

Datos de la aplicación

Fecha: ______________________ Lugar: ______________________

Nombre y firma
de la persona aplicadora: ______________________

Bibliografía

Fuentes consultadas

Agosto, Adalberto, *Módulo 8, Probabilidad (7mo-9no)*, Puerto Rico, Universidad de Puerto Rico en Bayamón, disponible en http://bit.ly/3UgNiw8 (Consulta: 2 de octubre de 2022).

Baldor, Aurelio, *Álgebra,* México, Editorial Patria, 2019.

Barriendos Rodríguez, Ana Laura y Solares Pineda, Diana Violeta, *Matemáticas II. Libro para el maestro. Volumen I,* Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), Subsecretaría de Educación Básica, México, 2012.

Barriendos Rodríguez, Ana Laura y Solares Pineda, Diana Violeta, *Matemáticas II. Libro para el maestro. Volumen II,* Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), Subsecretaría de Educación Básica, México, 2012.

Benítez López, René, *Fundamentos de geometría y trigonometría,* México, Editorial Trillas, 2014.

Carpinteyro Vigil, Eduardo, *Geometría y trigonometría. Conceptos y aplicaciones,* México, Editorial Patria, 2021.

De Oteyza, Elena, Lam, Emma, Hernández, Carlos y Carrillo, *Ángel,* Álgebra, México, Editorial Pearson, 2020.

El Tiempo (2021, 14 de diciembre), "¿Lo sabía? La probabilidad y la ciencia detrás de la lotería y el azar," disponible en http://bit.ly/3V77py3 (Consulta: 11 de noviembre de 2022).

Fuentes, Alberto, *Jugando con la ciencia, ¡y a construir el conocimiento!,* Bogotá, Editora Cultural Internacional, 2004.

García Álvarez, Miguel Ángel, *Introducción a la teoría de la probabilidad II.* Segundo curso, México, Fondo de Cultura Económica, 2009.

Goberna, Miguel Ángel, Jornet, Valentín, Puente, Rubén y Rodríguez, Margarita, *Álgebra y fundamentos: una intodución,* Barcelona, Ariel, 2020.

Hernández, Ángel, *Las matemáticas y el azar,* México, Guadalmazán, 2019.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía, *Encuesta Nacional sobre Diversidad Sexual y de Género Web (ENDISEG Web),* 2022, disponible en https://www.inegi.org.mx/investigacion/endiseg/2022/ (Consulta: 23 de octubre de 2022).

Instituto Nacional de Estadística y Geografía, *Censo de Población y Vivienda 2020,* INEGI, México, 2021.

Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, *Operaciones avanzadas. Libro del adulto,* MEVyT INEA, México, 2019.

Marcellán, Francisco, Arvesu Carballo, Jorge y Sánchez Ruiz, Jorge, *Problemas resueltos de álgebra lineal,* México, Ediciones Paraninfo, 2015.

Martín de Diego, David y Timón, Ágata, "Eratóstenes: midiendo lo imposible", en *OpenMind BBVA*, 31 de mayo de 2018. Disponible en http://bit.ly/3WAiQiF (Consulta: 25 de octubre de 2022).

Martínez Hernández, María Leticia y Mohar Fresán, Daniel, *Matemáticas 1,* Serie INNOVAT, México, Innova Ediciones, 2020.

Matthews, Bennie, *Statics and Analytical Geometry,* United Kingdom, Ed-Tech Press, 2019.

Pozas, Diana Cecilia y Santor, María Laura, "El álgebra elemental en la escuela secundaria. Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico", *Revista Digital Matemática, Educación e Internet,* Vol. 16, No. 2, marzo-septiembre 2016.

Sagan, Carl, "Eratóstenes y la circunferencia de la Tierra", *Cosmos*, en Gutiérrez B. Alaguera, Jairo, disponible en http://bit.ly/3E7BG9L (Consulta: 26 de octubre de 2022).

Salazar Guerrero, Ludwing Javier y Bahena Roán, Hugo, *Álgebra*, México, Editorial Patria, 2019.

Secretaría de Educación Pública, *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado,* México, SEP, 2019.

Secretaría de Educación Pública, *Teorema de Pitágoras,* Aprende en casa, México, disponible en http://bit.ly/3OGpAbs (Consulta: 20 de noviembre de 2022).

Secretaría de Educación Pública, "Juegos de azar y matemáticas", en *acervo-aprende_mx*, disponible en bit.ly/3XBCMCg (Consulta: 4 de noviembre de 2022).

Suárez Cabrera, Julia Marcela (Coord.), "Presentación", en *Glosario de la diversidad sexual, de género y características sexuales,* Segob, Conapred, México, 2016, pp. 5-6. disponible en http://www.conapred.org.mx/documentos_cedoc/Glosario_TDSyG_WEB.pdf (Consulta: 7 de febrero de 2023).

Tippens, Paul E., *Física, conceptos y aplicaciones,* México, McGraw-Hill, 1985.

Velasco Sotomayor, Gabriel, Probabilidad. *Fundamentos y aplicaciones,* México, Editorial Trillas, 2015.

Fuentes sugeridas

Beremiz no solo cuenta ovejas, "Cómo hacer un triángulo rectángulo en *Geogebra*, Tutorial básico 3", en *Youtube*, disponible en https://bit.ly/3DKOaTp (Consulta: 30 de octubre de 2022).

Sagan, Carl, "Eratóstenes, y la circunferencia de la Tierra", disponible en http://bit.ly/3E7BG9L (Consulta: 12 de octubre de 2022).

Colegio de Ciencias y Humanidades, *Ecuaciones equivalentes,* en Portal Académico CCH de la UNAM, disponible en https://bit.ly/3fm8C4W (Consulta: 12 de octubre de 2022).

Colegio de Ciencias y Humanidades, *Ángulos y sus medidas,* disponible en Portal Académico CCH de la UNAM https://www.bit.ly/3UuXqSf (Consulta: 12 de octubre de 2022).

Colegio de Ciencias y Humanidades, *Problemas que llevan un sistema de ecuaciones lineales,* en Portal Académico CCH de la UNAM, disponible en https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad4/metodo-de-sustitucion/problemas-que-llevan-un-sistema-de-ecuaciones-lineales (Consulta: 3 de noviembre de 2022).

Notas

Notas

Notas

Notas

Colofón

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN DE LOS ADULTOS

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DISTRIBUCIÓN GRATUITA